

CATALOG
MATHEMATISCHER
M O D E L L E

FÜR DEN

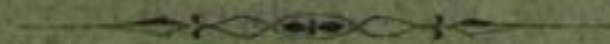
HÖHEREN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

VERÖFFENTLICHT

DURCH DIE VERLAGSHANDLUNG

VON

L. BRILL IN DARMSTADT.



Ausgegeben im November 1888.

CATALOG
mathematischer Modelle

für den höheren mathematischen Unterricht

veröffentlicht

durch die Verlagshandlung

von

L. Brill in Darmstadt.

Vierte Auflage.

Inhalt.

- I. Theil: Serienweise Zusammenstellung der Modelle in der Reihenfolge der seitherigen Publicationen.
 - II. Theil: Die Modelle nach ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit geordnet.
-

Vorwort zur dritten Auflage.

Die von Jahr zu Jahr wachsende Ausdehnung des Modell-Verlags liess es wünschenswerth erscheinen, der zum letzten Mal im Jahr 1882 erfolgten Ausgabe eines Katalogs eine neue (dritte) Auflage in erweiterter Form folgen zu lassen.

Zur besseren Uebersicht und rascheren Orientirung in den oft in verschiedenen Serien zerstreuten, sachlich aber zusammengehörigen Modellen schien es geboten, dem ersten Theil, der die Modelle lediglich nach ihrer Veröffentlichung in chronologischer Folge aufgezählt, einen zweiten, die Materie kategorienweise fügenden Theil anzureihen, in welchem den einzelnen Modellen je nach Erforderniss kurze Erläuterungen und ein Hinweis auf die einschlägige Literatur beigegeben sind. Hierdurch wurde ein bequemer Ueberblick über den vorhandenen Bestand der Modelle in einzelnen Wissenszweigen erzielt, und die Auswahl für das jeweilige Bedürfniss erleichtert.

Für die mit Gründlichkeit und Sachkenntniss vorgenommene Bearbeitung dieses zweiten Theils ist die Verlagshandlung dem auch bei Herausgabe einzelner Modelle thätig gewesenen Herrn Th. Kuen, dermalen Assistent an der königl. technischen Hochschule in München, zu Dank verpflichtet.

Es sei der unterzeichneten Verlagshandlung gestattet, an dieser Stelle überhaupt allen denjenigen Herren ihren Dank auszusprechen, welche dem Unternehmen seither ihre thätige Beihülfe, ihr Interesse und Wohlwollen zugewandt haben. Namentlich gedenkt sie hier der Betheiligung des Herrn Professor Dr. A. Brill, jetzt in Tübingen, dessen Anregung dieser Modell-Verlag überhaupt sein Entstehen und dessen dauernder Mitwirkung er sein Gedeihen verdankt.

Wie seither, so wird es auch künftig das Bestreben der Verlagshandlung sein, denjenigen wissenschaftlichen Kreisen zu dienen, welche in dem Gebrauch von Modellen und Zeichnungen ein Hilfsmittel und eine kräftige Stütze zur Förderung und Belebung mathematischer Studien erblicken. Mit Dank wird sie neue Anregungen in dieser Richtung jederzeit entgegennehmen.

Februar 1885.

Die Verlagshandlung von L. Brill in Darmstadt.

Zur vierten Auflage.

Bei Herausgabe dieser neuen Auflage schien es nicht erforderlich, die früher gewählte Eintheilung des Katalogs abzuändern; es erübrigte deshalb nur, die seit Erscheinen der früheren Auflage hinzugekommenen Serien (XIII.—XVI.) dem Katalog einzuverleiben.

Für die neuen Serien sind die im zweiten Theil enthaltenen Bemerkungen und Erläuterungen von den Urhebern jener Serien der Verlagshandlung gütigst zur Verfügung gestellt worden.

Inhaltsverzeichniss.

Vorwort	Seite III
-------------------	--------------

I. Theil.

Serienweise Zusammenstellung der Modelle in der Reihenfolge der seitherigen Publicationen.

Cartonmodelle von Flächen zweiter Ordnung, nach A. Brill	I
1. Serie: Abgüsse nach Originalen des mathematischen Instituts der technischen Hochschule München (1. Folge)	3
2. Serie: Desgleichen (2. Folge)	5
3. Serie: Gipsmodelle von Flächen zweiter Ordnung von R. Diesel in München	7
4. Serie: Fadenmodelle von Flächen zweiter Ordnung	9
5. Serie: Copien nach Originalen der techn. Hochschule München (3. Folge) .	11
6. Serie: Desgleichen; sowie Modelle von Wellenflächen nach Böklen u. s. w. .	13
7. Serie: Flächen dritter Ordnung nach Rodenberg	14
8. Serie: Copien nach Originalen der technischen Hochschule München (4. Folge)	17
9. Serie: Flächen vierter Ordnung nach Kummer	19
10. Serie: 1. u. 2. Nachtrag zu den Copien nach Originalen etc., ferner Modelle von O. Staude	21
11. Serie: Drahtmodelle zu den unebenen Curven nach Christian Wiener . .	23
12. Serie: Vier Fadenmodelle zum Studium der Raumcurve vierter Ordnung erster Art nach Hermann Wiener	24
13. Serie: Fadenmodelle der Regelflächen vierter Ordnung nach Rohn . . .	27
14. Serie: Modelle zur Functionentheorie; Copien nach Originalen der technischen Hochschule München (5. Folge)	29
15. Serie: I. Projections-Modelle der vier ersten regelmässigen vier-dimensionalen Körper nach Schlegel	31
II. Bestimmung der Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird, nach Reinbeck	32
16. Serie: I. Modelle zur Lehre von den confocalen Flächen zweiten Grades .	33
II. Modelle einiger Riemann'schen Flächen	36

II. Theil.

Die Modelle nach ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit geordnet,
nebst einleitenden Bemerkungen und Erläuterungen.

	Seite
I. Flächen zweiter Ordnung:	
A. Ellipsoide	37
B. Hyperboloide und Kegel	38
C. Paraboloiden	39
II. Algebraische Flächen höherer Ordnung:	
A. Serie von Flächen dritter Ordnung	40
B. Cycliden	43
C. Kummer'sche Flächen	45
D. Serie von Flächen vierter Ordnung mit 4 längs Kreisen berührenden Ebenen	45
E. Serie von Regelflächen vierter Ordnung	46
F. Diverse algebraische Flächen vierter und höherer Ordnung	47
III. Modelle zur Functionentheorie, transcendente Flächen	48
IV. Raumcurven	51
V. Krümmung der Flächen:	
A. Krümmungslinien, Asymptotencurven und geodätische Linien auf Flächen	52
B. Flächen von constantem Krümmungsmass und auf einander abwickelbare Flächen	56
C. Flächen von constanter mittlerer Krümmung, Minimalflächen	58
D. Centraflächen, Brennflächen	60
VI. Modelle zur darstellenden Geometrie, Raumlehre, Physik und Mechanik	60
Modell-Untersätze	62

Erklärung der Abkürzungen u. s. w.

Die Modelle sind, wenn nicht Anderes ausdrücklich erwähnt, in Gips ausgeführt.

Ein Stern * an der laufenden Nummer des II. Theils bedeutet, dass das betr. Modell einzeln nicht abgegeben wird, sondern nur in Gemeinschaft mit den anderen, der betr. Serie oder Gruppe angehörigen Modellen.

Die Grösse der Modelle ist nur bis auf Centimeter genau angegeben.

Die Figuren stellen die im Text nachfolgenden Nummern dar.

Erster Theil.

Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

construirt nach Angabe

von

Dr. A. Brill,

ord. Professor an der kgl. techn. Hochschule zu München.

Dargestellt durch ineinandergefügte Ausschnitte aus farbigem Cartonpapier.

1. **Ellipsoid**, gebildet aus 22 Kreisen. I. A. 4.
2. desgl., anderer Construction, gebildet aus 30 Kreisen. I. A. 5.
3. **Hyperboloid, einschaliges**, gebildet aus 34 Kreisen. I. B.
4. desgl., **zweischaliges**, (eine Hälfte) gebildet aus 24 Kreisen.
5. **Paraboloid, elliptisches**, gebildet aus 28 Kreisen.
6. desgl., **hyperbolisches**, gebildet aus 26 geradlinig begrenzten Schnitten.
7. **Kegel**, (eine Hälfte) gebildet aus 26 Kreisen.

Die Cartonscheiben sind, unbeschadet der Beweglichkeit, gegenseitig so befestigt, dass ein Auseinanderfallen der Modelle verhütet wird. Eine wissenschaftliche Erläuterung ist beigelegt.

Preis der Serie: 16 Mark.

Auf Verlangen werden die Modelle Nr. 4 und 7, damit die beiden Flächenmäntel in ihrer gegenseitigen Lage veranschaulicht werden können, je in **2 Exemplaren** geliefert. Zum Aufstecken des Doppelkegels eignet sich dann das für das einschalige Hyperboloid bestimmte Gestell Nr. 2, während für Nr. 4 (zweischaliges Hyperboloid) zwei Gestelle (Nr. 1) erforderlich sind. Die Mehrkosten betragen Mark 2. 30. für jedes weitere Modell.

Die vorliegenden Modelle, welche die Idee, Flächen zweiter Ordnung durch ihre Kreisschnitte darzustellen, in systematischer Weise zur Anwendung bringen, haben seit ihrem ersten Erscheinen (1874) allenthalben die beifälligste Aufnahme und die günstigste Beurtheilung seitens in- und ausländischer Fachjournale erfahren, so dass eine besondere Empfehlung überflüssig erscheint. Es sei nur bemerkt, dass sich dieselben von anderen Flächenmodellen besonders durch ihre Beweglichkeit unterscheiden, vermöge deren jedes einzelne Modell nicht nur ein einzelnes Ellipsoid, Hyper-

boloid etc., sondern ein ganzes System von Flächen der einen oder anderen Art darstellt, Flächenformen, welche das Modell der Reihe nach durch Anwendung eines leichten Druckes oder Zuges annimmt.

Bei der Biegsamkeit des Stoffs, aus dem die Modelle hergestellt sind, schien es geboten, zweckentsprechende Stative anfertigen zu lassen, um die Modelle bei dem Gebrauch zu schonen und einzelne Formtheile beim Anfassen mit der Hand nicht undeutlich werden zu lassen.

Stativ Nr. 1 zum Aufstecken der Mod. Nr. 1, 2, 4, 5 u. 7. Preis Mark 1.50.

» » 2 zum Aufstecken des Mod. Nr. 3. Preis Mark 2. —.

» » 3 zum Aufstellen des Mod. Nr. 6. Preis Mark 1. —.

Bei Bestellung der Stative ohne Angabe der gewünschten Anzahl werden dieselben für sämtliche Modelle mitgeliefert, mithin 5 Stück von Nr. 1, je 1 Stück von Nr. 2 u. 3.

Erste Serie.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen.

Ausgeführt

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

- I. **Die Rotationsfläche der Tractrix mit geodätischen und Haupttangenten-Curven.** Modellirt von stud. math. *J. Bacharach*. (Grösse des Modells 25—18 cm.) Preis 9 Mark.
- II. **Die Brennfläche eines Strahlensystems, welche mit der Fläche der Krümmungcentra des elliptischen Paraboloids in collinearer Verwandtschaft steht.** Modellirt von stud. math. *L. Schleiermacher*.
 - a) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt (Grösse 10—10 und 7—7 cm.) à 5 Mark.
 - b) Die beiden Mäntel vereinigt (Grösse 10—11 cm.) 5 Mark.
- III. **Die Centrafläche des einschaligen Hyperboloids.** Modellirt von stud. math. *W. Dyck*.
 - a) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt (Grösse 17—16 und 17—16 cm.) à 8 und 9 Mark.
 - b) Die beiden Mäntel vereinigt (Grösse 17—16 cm.) 10 Mark.
- IV. **Die geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.** Construiert von stud. math. *K. Rohn*. (Grösse 12—18 cm.) 6 Mark.
- V. **Die geodätischen Linien durch die Nabelpunkte des dreiaxigen Ellipsoids.** Construiert von stud. math. *K. Rohn*. (Grösse 10—18 cm.) 6 Mark.

Ganze Serie: 60 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 8. — pro ganze Serie in Anrechnung.

Bei Gelegenheit der Uebungen, welche in dem mathematischen Institut des k. Polytechnikums in München von den Herren Professoren *Brill* und *Klein* geleitet werden, wurde als Zweck und Endziel der auszuführenden Untersuchungen mehrfach die Herstellung eines Modells oder einer Zeichnung ins Auge gefasst. Einige der so als Uebungsbeispiele entstandenen Modelle erwiesen sich, mit Rücksicht darauf, dass an derartigen Anschau-

ungsmitteln kein Ueberfluss ist, als der Vervielfältigung werth, und eine erste Serie derselben, welche unter Leitung von Herrn *Brill* entstanden ist, wird hiermit der Oeffentlichkeit übergeben. Die Modelle sind in der Folge, wie sie gerade ausgeführt wurden, aneinandergereiht und erheben, schon in Folge ihrer Entstehungsweise, nicht den Anspruch, etwas in sich Abgeschlossenes zu geben oder allen Anforderungen eines weiteren Gesichtskreises zu genügen. Immerhin dürften dieselben auch in dieser Form manches Neue und des Interesses Werthe enthalten, wie denn die beigefügten Abhandlungen keineswegs blos Bekanntes reproduciren; und der Zweck, den Urheber und Verleger im Auge haben, wäre erreicht, wenn die Anregung, die von räumlichen Darstellungen auszugehen pflegt, einen Vorzug auch der vorliegenden Modelle bilden würde.

Darmstadt, 1877.

Anmerkung. Die Modelle dieser Serie wie vieler folgenden, deren Originale dem mathematischen Institut der königl. technischen Hochschule zu München entstammen, sind, zur äusseren Kennzeichnung ihres gemeinsamen Ursprungs und zur besseren Unterscheidung von den selbständigen Modellpublicationen der Verlagshandlung, mit fortlaufenden römischen Zahlen numerirt.

Zweite Serie.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen.

Ausgeführt

unter Leitung der Proff. Dr. Brill und Dr. Klein.

A. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. Klein.

VI. **Drei Modelle der Kummer'schen Fläche.** Von stud. math. *K. Rohn.*

a) Alle sechszehn Knotenpunkte sind reell. (Grösse des Modells 21—18 cm.)
Preis 24 Mark.

b) Acht Knotenpunkte reell. (Grösse 30—20 cm.) Preis 28 Mark.

c) Vier Knotenpunkte reell. (Grösse 20—15 cm.) Preis 18 Mark.

VII. **Fläche dritter Ordnung mit vier reellen conischen Knotenpunkten nebst Haupttangentencurven.** Von stud. math. *J. Bacharach.* (Grösse 13—22 cm.)
Preis 14 Mark.

B. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

VIII. **Die Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung nebst geodätischen Linien.** Von stud. math. *A. v. Braunmühl.*

a) Onduloid (Grösse 12—26 cm.) Preis 9 Mark.

b) Nodoid (Grösse 11—8 cm.) Preis 8 Mark.

c) Ring des Nodoids, durch Umdrehung der Schleife entstanden. Preis 2 Mark.

d) Catenoid (Grösse 16—10 cm.) Preis 8 Mark.

IX. **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Kegel-Typus) nebst geodätischen und Asymptoten-Linien.** Von stud. math. *J. Bacharach.*
(Grösse 17—17 cm.) Preis 9 Mark.

- X. **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Hyperboloid-Typus) mit parallelen geodätischen Linien und geodätischen Kreisen.** Von stud. math. *W. Dyck.* (Grösse 13—21 cm.) Preis 12 Mark.
- XI. **Bahncurve eines schweren Punktes auf einer Kugel.** Von stud. math. *L. Schleiermacher.* (Grösse 18—14 cm.) Preis 11 Mark.

Ganze Serie: 120 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 10.—, pro ganze Serie in Anrechnung.

Jeder Nummer ist ein erläuternder Text beigelegt, bei Nr. XI. ist die erforderliche Erläuterung unmittelbar an dem Modell angebracht.

Darmstadt, 1877.

Dritte Serie.

Gips-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

ausgeführt

von

R. Diesel,

Studirendem der kgl. techn. Hochschule in München.

Ganze Serie, bestehend aus 18 Modellen.

I. Gruppe, 7 Modelle (Nr. 1, 3, 5, 8, 10, 13 u. 17). — II. Gruppe, 11 Modelle
(Nr. 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14—16 u. 18).

1. **Ellipsoid**, grosse Halbaxe = 5 cm.; Axenverhältniss $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$. Preis Mark 1.40.
2. Dasselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 2.80.
3. **Ellipsoid**, grosse Halbaxe = 9 cm.; Axenverhältniss $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$. Preis Mark 1.90.
4. Dasselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 6.80.
5. **Einschaliges Hyperboloid** mit dem Asymptoten-Kegel; grosse Halbaxe der Kehlellipse = 4 cm., Höhe des Modells: 23 cm. Preis Mark 8.20.
6. Dasselbe mit den beiden Schaaren von geraden Erzeugenden. Preis Mark 13.60.
7. Dasselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 11. —.
8. **Zweischaliges Hyperboloid** (vgl. Nr. 17), reelle Halbaxe = 0,93 cm., Höhe des Modells: 23 cm. Preis Mark 13.60.
9. Dasselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 16.40.
10. **Elliptisches Paraboloid**, Halbaxen der Grundellipse 9,5 cm. und 6 cm., Höhe des Modells: 20 cm. Preis Mark 2.80.
11. Dasselbe mit Schnitten parallel zur Grundellipse. Preis Mark 3.80.
12. Dasselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 6.80.
13. **Hyperbolisches Paraboloid** (gleichseitig), Durchmesser des Begrenzungscylinders = 14 cm. Preis Mark 3.80.
14. Dasselbe mit ebenen Hyperbel-Schnitten. Preis Mark 6.80.
15. Dasselbe mit den beiden Schaaren von Erzeugenden. Preis Mark 5.60.
16. Dasselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 4.70.
17. **Elliptischer Kegel**, Halbaxen der Grundellipse: 10,4 cm. und 5,4 cm.; Höhe des Modells: 11,5 cm. Dieser Kegel ist Asymptoten-Kegel sowohl zu dem einschaligen Hyperboloid (Nr. 5), wie zu dem zweischaligen (Nr. 8). Preis Mark 3.80.
18. Derselbe mit Krümmungslinien. Preis Mark 5.60.

Auf sämtlichen Modellen der I. Gruppe sind die Hauptschnitte angegeben.

Preis der complete Serie: 100 Mark,

» » **I. Gruppe: 35 »**
» » **II. 75 »**

excl. Emballage und Versandkosten: für erstere kommen Mk. 15.—. pro ganze Serie,
für Gruppe I. Mk. 7.—., für Gruppe II. Mk. 8.—. in Anrechnung.

Die vorliegende Serie von Modellen richtet sich an den grossen Kreis derjenigen Mathematiker, die im Verlauf ihrer Lehrthätigkeit oder gelegentlich ihrer Untersuchungen das Bedürfniss einer anschaulichen Darstellung der verschiedenen Typen der Flächen zweiter Ordnung empfunden haben. So lange schon dieses Bedürfniss besteht, so wenig ist bis jetzt geschehen, demselben abzuhelpen; existirte bis dahin doch eine systematische Zusammenstellung der Flächentypen zweiter Ordnung — mit einziger Ausnahme der in diesem Verlag erschienenen Cartonmodelle — überhaupt nicht, von Modellen mit Krümmungslinien gar nicht zu reden. So entschloss sich die Verlagshandlung zur Herstellung der obigen Serie und es gelang ihr, in dem Autor derselben eine wissenschaftlich wie technisch gleich befähigte Kraft zur Ausführung ihres Unternehmens zu gewinnen. Um jedem Wunsche begegnen zu können, wurde die Serie in zwei Gruppen getheilt, von denen die erstere sämtliche Flächen zweiter Ordnung, theilweise in mehreren Typen vertreten, jedoch nur mit Angabe der Hauptschnitte, umfasst, während die zweite dieselben Typen mit den beiden Schaaren von Krümmungslinien, ferner einige mit Parallelschnitten und einige mit den geraden Erzeugenden enthält. Der letzten Abtheilung sind zwei kleine Abhandlungen über die Herstellung der Krümmungslinien beigelegt.

Durch diese Eintheilung glaubt die Verlagshandlung den Wünschen der Hochschulen eben so sehr wie denen der technischen Mittelschulen entgegen zu kommen. Den Industrie- und Gewerbeschulen, Real- und Kunstschulen namentlich glaubt der Verleger die erste Gruppe der Serie empfehlen zu dürfen, auch wenn die Lehrpläne und Studienprogramme derselben nicht in das Studium der Flächen zweiter Ordnung unmittelbar einführen; sollte doch jedem zukünftigen Techniker die Gelegenheit geboten werden, sich wenigstens auf dem Wege der Anschauung eine Vorstellung davon zu erwerben, was man unter einem Paraboloid, einem Ellipsoid u. s. w. versteht. Andererseits dürften bei Vorträgen an Hochschulen die Modelle der zweiten Gruppe, welche wichtige Eigenschaften derselben zur Anschauung bringen, nicht weniger willkommen sein.

So erlaubt sich denn die Verlagshandlung das vorliegende neue Unternehmen einer ebenso wohlwollenden Aufnahme zu empfehlen, wie sie die früher von ihr ausgegebenen Serien von Modellen bei dem mathematischen Publikum bereits gefunden haben.

Darmstadt, 1878.

Vierte Serie.

Faden-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

dargestellt

durch Seidenfäden in Messinggestellen.

Ganze Serie, bestehend aus 5 Modellen.

1. Unveränderliches **Hyperboloid**. Das Modell zeigt zwei Systeme von Flächen-erzeugenden nebst Asymptotenkegel. Jedes System wird durch 64 Fäden repräsentirt. Abstand der Grundplatten 24 cm., Axenverhältniss der Kehlellipse: 21 : 13.

2) Bewegliches **Hyperboloid**, in der einen Grenzlage ein Cylinder, in der anderen ein Kegel. Das Modell ist so angeordnet, dass beide Grundplatten beliebig gegen einander gedreht und geneigt werden können. Die durch 64 Erzeugende gebildete Fläche durchläuft dabei alle Lagen des geraden oder schiefen Rotations-Hyperboloids zwischen Cylinder und geradem, bezw. schiefem, Kegel und bildet bei gegen einander geneigten Grundplatten Flächen vierter Ordnung mit leicht erkennbarer Striktionslinie. Die durch 22 Erzeugende dargestellte Tangentenebene an Cylinder und Kegel durchläuft alle Lagen des das Hyperboloid längs einer Erzeugenden tangirenden hyperbolischen Paraboloids. Abstand der Grundplatten 26 cm., Höhe des ganzen Modells 55 cm.

Auf Wunsch kann das Modell auch mit 2 Systemen von Erzeugenden, ähnlich wie bei Nr. 3, hergestellt werden.

3. Bewegliches **Hyperboloid**, in beiden Grenzlagen ein Kegel. Die Grundplatten sind beweglich wie in Nr. 2, aber es sind zwei Systeme von Fäden gespannt, welche in einer mittleren Lage die Erzeugenden eines Hyperboloids darstellen, bei einer Drehung der Grundplatten jedoch sich von einander trennen und zwei verschiedene Hyperboloide bilden, welche in der (in der Abbildung dargestellten) Grenzlage in zwei Kegel übergehen. Die durch 22 Erzeugende dargestellte Tangentenebene durchläuft wechselnde Lagen des die äussere Fläche berührenden hyperbolischen Paraboloids. Abstand der Grundplatten 22,5 cm., Durchmesser der oberen 10 cm., der unteren 20 cm., Höhe des ganzen Modells 50 cm.

4. Unveränderliches **hyperbolisches Paraboloid**. Da die Fläche eine allseitig offene ist, so wurde die Vorstellung des Flächenhaften durch Anordnung besonders dicht gespannter Fäden zu erhöhen gesucht. Die Tangentialebene im Scheitel enthält zwei Erzeugende der Fläche, welche normal zu einander stehen. Eine dieser Ebene parallele bildet die Grundplatte des Modells; der Abstand der beiden anderen dazu senkrechten Begrenzungsebenen beträgt 17 cm.

5. Bewegliches **hyperbolisches Paraboloid**. Die Fläche ist in ein gleichseitiges windschiefes Viereck einbeschrieben, dessen Seiten paarweise fest verbunden sind. Durch Drehung um eine horizontale Axe (Diagonale des Vierseits) lassen sich diese Seitenpaare aus der horizontalen in eine vertikale Grenzlage drehen, wobei die aus 2 sich kreuzenden Systemen von je 42 Erzeugenden gebildete Fläche aus einer horizontalen Ebene in eine vertikale Doppelebene übergeht. Durch Klemmschrauben ist die Fläche in jeder Lage leicht festzustellen. Seite des Vierecks = 32 cm.

Diese Serie dient den Darstellungsarten der Cartonmodell-Serie und der Serie 3 der Gipsmodelle von Flächen zweiter Ordnung als wesentliche Ergänzung.

Preis der ganzen Serie: 270 Mark.

Bei Einzel-Bezug der Modelle kostet Nr. 1 30 Mark, Nr. 2 70 Mark (mit Doppelfadensystem 75 Mark), Nr. 3 75 Mark, Nr. 4 44 Mark, Nr. 5 70 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen bei Bezug der ganzen Serie Mk. 20. —, in Anrechnung, bei Bezug einzelner Modelle werden dieselben nach Verhältniss berechnet.

Die Modelle werden gewöhnlich mit schwarz gebeizten Messinggestellen geliefert, auf besonderen Wunsch jedoch auch mit messingfarbenen, zum Schutz gegen Anlaufen mit Lacküberzug versehenen Gestellen zu gleichem Preise. Bei sämtlichen Modellen, insbesondere bei den beweglichen, sind die Verbindungen der Messingtheile mit aller Sorgfalt einfach und dauerhaft hergestellt.

Darmstadt, 1879.

Fünfte Serie.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen.

Neue (dritte) Folge.

Ausgeführt

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

- XII. **Darstellung der elliptischen Funktion $q = a m(u, k)$ durch eine Fläche.** Von den studd. math. *Th. Kuen* und *Chr. Wolff*. (Grösse 19—25—35 cm.) Preis Mark 18.
- XIII. **Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass mit geodätischen Linien (drei Typen mit gleichem Krümmungsmass).** Nach den Zeichnungen von *E. Bour* (*Journal de l'Ecole Polyt.*, Tome 22) modellirt und mit geodätischen Linien versehen von Assistent Dr. *P. Vogel*.
- a) Die Kugel. (Grösse 9 cm.) Preis Mark 1.
 - b) Die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe. (Grösse 11—7 cm.) Preis Mark 4.
 - c) Die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe nicht. (Grösse 10—12 cm.) Preis Mark 9.
- XIV. **Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass** (Letzteres ist das der Flächen unter XIII.). Von stud. math. *Th. Kuen*. (Grösse 24—15 cm.) Preis Mark 13.
- XV. **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass** (Meridiancurve ist die Tractrix. Vgl. U. Dini, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* 1865, 1. Sem. S. 340). Von Dr. *P. Vogel*. (Grösse 24—15 cm.) Preis Mark 15. 50.
- XVI. **Vier Formen der Dupin'schen Cyclide** (vgl. die Abhandlung von Clerk Maxwell in *Quart. Journ. of Math.* Bd. 9, S. 111) von Dr. *P. Vogel*.
- a) Ringcyclide (mit imaginären Knotenpunkten). (Grösse 7—14 cm.) Preis Mark 9.
 - b) Horncyclide (zwei reelle Knotenpunkte vereinigen zwei auseinander liegende Flächenmäntel). (Grösse 6—19 cm.) Preis Mark 11. 50.
 - c) Spindelcyclide (zwei reelle Knotenpunkte vereinigen zwei ineinander liegende Flächenmäntel). (Grösse 10—11 cm.) Preis Mark 6. 50.
 - d) Parabolische Cyclide mit zwei reellen Knotenpunkten (erstreckt sich mit einem unpaaren Flächenmantel ins Unendliche. (Grösse 12—15 cm.) Preis Mark 11. 50.

XVII. **Die Kettenlinie auf der Kugel.** (Vgl. die Abhandlung von Clebsch in Crelle's Journ. Bd. 57, S. 104.) (Grösse 9 cm.) Preis Mark 8.

Die beiden (auf einer Kugel vereinigten) Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reducirt. In den Bezeichnungen der genannten Abhandlung: $q \sin \varepsilon = 1$, a) $q = \frac{3}{4}$, b) $q = \frac{5}{4}$.

XVIII. **Die Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.** Von Dr. A. v. Braunmühl. (Vgl. dessen Abhandlung in den Math. Annalen Bd. 14. S. 557.)

a) Das verlängerte Rotationsellipsoid (ein Ausgangspunkt). (Grösse 12—8 cm.) Preis Mark 6. 50.

b) Das Sphäroid, mit den Enveloppen für zwei verschiedene Ausgangspunkte. (Grösse 7—10 cm.) Preis Mark 6. 50.

Ganze Serie: 100 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 8. —. pro ganze Serie in Anrechnung.

Den Nummern XII., XIV., XV. und XVIII. sind Abhandlungen beigefügt, in welchen der Gang der Rechnung kurz dargelegt wird.

Darmstadt, 1880.

Sechste Serie.

Gips-Modelle.

XIX. Die Raumcurven dritter Ordnung auf Cylindern zweiter Ordnung dargestellt von stud. math. *E. Lange*. Gipsabgüsse nach den unter Leitung von Professor Dr. *Klein* im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (Grösse 10,5—6,5 cm.) Preis Mark 18.

- a) Die cubische Ellipse. b) Die cubische Hyperbel. c) Die cubische Parabel.
d) Die cubisch-hyperbolische Parabel.

1. Die Wellenfläche für optisch zweiachsig Krystalle. Verhältniss der Axenlängen 12 : 8,3 : 6,1. (Grösse 12—8 cm.) Preis Mark 9.

a) Der äussere Mantel (längs eines Hauptschnittes zerlegbar) mit Ausschnitten, die den inneren Mantel zeigen. (Grösse 12 cm.)

b) Der innere Mantel.

2. Das zugehörige Ellipsoid (mit den gleichen Axen). Preis Mark 4.

3. Die Wellenfläche für optisch einachsig Krystalle (mit negativer Doppelbrechung). Ein Ausschnitt des Sphäroids zeigt die Kugel. Das Axenverhältniss 8,8 : 7,8 ist ungefähr das des Kalkspaths. (Grösse 8—9 cm.) Preis Mark 4.

(Wellenfläche für optisch einachsig Krystalle mit positiver Doppelbrechung s. X. Serie, 1. Nachtrag Nr. 7.)

4. Die Wellenfläche für optisch zweiachsig Krystalle in einzelnen Octanten, mit den sphärischen und ellipsoidischen Linien auf beiden Mänteln und 8 Nabelpunkten. Verhältniss der Axenlänge 12 : 9 : 6. Grösse der halben Fläche (2 Octanten) 24—9 cm. Preis Mark 8. 50.

5. Ein Kreiskegel mit Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Schnitt. Die einzelnen Stücke sind beweglich. (Grösse 32—19 cm.) Preis Mark 22.

Ganze Serie: 60 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 7.—. pro ganze Serie in Anrechnung.

Der Nr. XIX. ist eine Abhandlung des Verfertigers, der Nr. 4 eine solche von Herrn Rector Dr. Böklen in Reutlingen beigelegt.

Darmstadt, 1880.

Siebente Serie.

Gips-Modelle von Flächen dritter Ordnung.

Die verschiedenen Gestalten der Flächen dritter Ordnung mit parabolischen
Curven und die wichtigsten ihrer Hesse'schen Flächen

von

Dr. Carl Rodenberg,

Professor der Mathematik an der Gr. technischen Hochschule zu Darmstadt.

Ganze Serie, bestehend aus 27 Modellen.

I. Gruppe Mod. Nr. 1—15, II. Gruppe Mod. Nr. 16—26.

1. Diagonalfäche mit 27 reellen Geraden.
- 2—6. Flächen mit 4 reellen C_2^*), welche unter sich collinear sind, und nur im Verhalten zur unendlich fernen Ebene Unterschiede zeigen.
7. Fläche mit 3 reellen C_2 , zu denen kein vierter treten kann.
8. Dieselbe Art, von der andern Flächenseite betrachtet, zur Bildung des U_6 (Modell 16).
9. Fläche mit 3 reellen B_3 .
10. Fläche mit B_3 , dessen Ebenen in je drei reellen Knotenstrahlen schneiden. Das Modell dient gleichzeitig zur Ueberführung des B_3 in einen U_6 .
11. Fläche mit B_3 , dessen Ebenen conjugirt imaginär sind.
- 12 u. 13. Fläche mit $B_4 + 2 \begin{cases} \text{reellen} \\ \text{imaginären} \end{cases} C_2$. Bei 12 sind die Ebenen des B_4 reell, bei 13 imaginär.
14. Fläche mit $B_5 + C_2$.
15. Fläche mit $B_6 + C_2$.
- 16 u. 17. Fläche mit U_6 , dessen Ebene in $\begin{cases} \text{drei} \\ \text{einem} \end{cases}$ reellen $\begin{cases} \text{Strahlen} \\ \text{Strahl} \end{cases}$ schneidet.
18. Fläche mit U_7 .
19. Fläche mit U_8 .
20. Regelfläche, deren Doppelgerade völlig von reellen Flächentheilen umgeben ist.
21. Regelfläche, bei deren Doppelgerade dies nur für eine endliche von zwei Cuspidalpunkten begrenzten Strecke der Fall ist.

*) Die Buchstaben C , B , U bedeuten bezw. einen conischen, einen biplanaren, einen uniplanaren Knoten, der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten, um welche die Klasse durch die betreffende Singularität erniedrigt wird. — Vergl. übrigens die Ausführungen im 2. Theil.

- 22 u. 23. Cayley'sche Regelfläche mit $\left\{ \begin{array}{l} \text{unendlich fernem} \\ \text{im Endlichen gelegenen} \end{array} \right\}$ Cuspidalpunkte.
- 24 a. Hesse'sche Fläche zu 2 und 5.
- 24 b. Sternförmiger Theil der vorhergehenden für ein Pentaeder, das aus der unendlich fernen Ebene und einem regulären Tetraeder besteht.
25. Hesse'sche Fläche zu 7.
26. (Drahtmodell) Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 C_2 , welche einem reellen Pentaeder angehören, auf den Punktraum.

Die wenigen bis jetzt publicirten Modelle von Flächen dritter Ordnung stehen, wenn man von den einfachsten Arten, den Regelflächen, absieht, in keinem organischen Zusammenhange mit einander und weisen nur die niedrigsten Singularitäten auf. Durch die vorliegende Serie wird nun eine **Darstellung sämtlicher charakteristischen Typen von Flächen dritter Ordnung**, namentlich auch der mit höheren Singularitäten begabten, beabsichtigt, mit deren Hülfe man sich ein vollständiges und abgeschlossenes Bild aller möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung, die für eine Gesamtdarstellung zu zahlreich wären, verschaffen kann, indem man jeden beliebigen Typus aus einem der gegebenen (und ebenso irgend zwei der vorliegenden aus einander) durch continuirliche Deformation auf anschauliche Weise und ohne jede Schwierigkeit ableiten kann. Dieselbe Aufgabe ist zugleich für diejenigen Hesse'schen Flächen gelöst, welche einem eigentlichen reellen Pentaeder angehören. Von der nicht mehr schwierigen Behandlung der übrigen Arten dieser Fläche, welche den verschiedentlich degenerirten Pentaedern zukommen, wie sie der Verfasser im Bd. 14 der Math. Annalen aufgezählt hat, konnte füglich abgesehen werden.

Für die wirkliche Darstellung erwiesen sich besonders diejenigen Typen geeignet, die neben der gegebenen höheren Singularität noch so viel wie möglich conische Knoten zeigen, und wurden daher diese Flächen modellirt. Die übrigen mit weniger und keinem conischen Knoten mag man sich dann durch Anwendung der beiden Processe des »Verbindens« und »Trennens«, wie sie Herr Prof. *Klein* in seiner Arbeit, Math. Annalen Bd. VI., benutzt, und welche an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen, ableiten. Dies gilt auch namentlich für Flächen mit nur conischen Knoten, oder ohne Singularitäten, welche imaginäre Linien haben.

Unterschiede in der Gestalt, welche in verschiedenem Verhalten einer und derselben Art zur unendlich fernen Ebene ihren Grund haben, sind nur an einer Gruppe, den Flächen mit 4 C_2 , klar gelegt, welche sich hierzu besonders eignen. Alle übrigen — mit Ausnahme der Regelflächen — werden von der unendlich fernen Ebene in einem unpaaren Curvenzuge getroffen, da sich gerade bei dieser Annahme die Bildung höherer Singularitäten aus niederen, insbesondere aus C_2 , sehr anschaulich macht, indem

nur endliche Deformationen nothwendig werden. Hat man an letzteren Modellen dann einmal das Verhalten der Fläche in der Nähe der Singularität und deren Entstehung kennen gelernt, so gibt ein Blick auf diejenigen mit $4C_2$ eine Vorstellung von den ihnen collinearen Gestalten.

Da ein conischer Knoten in einem gegebenen Punkt bei festem eigentlichen Pentaeder die Fläche vollständig bestimmt, so kann er als Bild derselben gedacht werden. Mit Hülfe des Modells 26 kann man dann ohne Weiteres die Art der zugehörigen Fläche angeben und eine Vorstellung von ihrem ungefähren Verlaufe gewinnen.

Preis der ganzen Serie: 300 Mark

» » **I. Gruppe: 140** »

» » **II. » 160** »

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 16.—, pro ganze Serie,
für Gruppe I. Mk. 8.—, für Gruppe II. Mk. 8.— in Anrechnung.

Den Modellen ist eine 2 Bogen in gr. 8^o umfassende Abhandlung beigelegt.

Darmstadt, 1881.

Achte Serie.

Gips - Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen.

Fortsetzung (vierte Folge).

Ausgeführt

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

- XX. **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien** (nach *L. Bianchi*, vergl. Mathematische Annalen Bd. 16, sowie *A. Enneper*, Göttinger Nachrichten 1868). Von stud. math. *J. Mack*. (Grösse 24—18 cm.) Preis Mark 16.
- XXI. **Minimalfläche neunter Ordnung** (nach *Enneper*, vgl. Göttinger Nachrichten 1871, S. 28). Von cand. math. *G. Herting*. (Grösse 26—34 cm.) Preis Mark 21.
- XXII. **Fläche zwölfter Ordnung, Brennfläche** der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Von stud. math. *S. Finsterwalder*. (Grösse 13—20—12 cm.) Preis Mark 15.
- XXIII. **Reliefperspectivische Darstellung** eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcyinders, auf einem Untersatz vereinigt. Von stud. math. *H. Thoma*. (Grösse 20—45—5 cm.) Preis Mark 23.
- XXIV. **Röhren-Schraubenfläche** nebst Krümmungslinien. Von Assistent *Th. Kuen*. (Grösse 20—30 cm.) Preis Mark 13.
- XXVa. **Windschiefe Schraubenfläche** nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven. Von cand. math. *G. Herting*. (Grösse 23—22 cm.) Preis Mark 17.
- Um die Abwicklung dieser Fläche auf ein Catenoid zu zeigen:
- b. **Catenoid** (Umdrehungsfläche der Kettenlinie) aus biegsamem Messingblech. *) Preis Mark 2.
- c. **Dasselbe** in Gips, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven. (Grösse 10—22 cm.) Preis Mark 10. 50.
- Das Catenoid aus Messingblech wird in die windschiefe Schraubenfläche in der Weise übergeführt, dass man die Endpunkte des Kehlkreises fasst und diesen in eine gerade Linie auszieht, indem man gleichzeitig ein wenig tordirt.

*) Der Kehlkreis der Rotationsfläche geht bei der Deformation in die Axe der Schraubenfläche über.

XXVIa. **Auf das Rotationsellipsoid abwickelbare Schraubenfläche** (nach *E. Bour*, Journal de l'Ecole polytechnique Bd. XXII.) (Grösse 25—12 cm.) Preis Mark 10. 50.

b. **Rotationsellipsoid** aus biegsamem Messingblech. Preis Mark 2. 50.

c. **Dasselbe** in Gips. (Grösse 3—9 cm.) Preis Mark 1. 50.

Ganze Serie: 125 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 11. —. pro ganze Serie in Anrechnung.

Der Nr. XX. ist eine Abhandlung von Assistent *Th. Kuen*, den Nummern XXI., XXII., XXIV. sind Abhandlungen der Verfertiger beigelegt. Die Erläuterung zu Nr. XXIII. ist auf dem Modell selbst angebracht.

Darmstadt, 1882.

Neunte Serie.

Gips-Modelle von Flächen vierter Ordnung

nach Herrn Kummer in Berlin.

Copien nach den im Besitze des mathematischen Seminars der k. Universität zu Berlin befindlichen Originalen, von Herrn Kummer besprochen in den Monatsberichten der k. Academie der Wissenschaften zu Berlin von 1862, 1866, 1872.

1—6. Sechs Typen von Flächen vierter Ordnung mit vier längs Kreisen berührenden Ebenen.

Die Kreise sind die Durchschnittslinien einer Kugel mit den Seitenflächen eines regulären concentrischen Tetraeders.

1. Die Fläche besteht aus **vier congruenten Theilen**, die in **sechs biplanaren Knotenpunkten** zusammenhängen. Preis Mark 17.
2. Wie in Nr. 1, die Tangentialebenen in den Knotenpunkten sind jedoch **imaginär**. Preis Mark 19.
3. **Die Römische Fläche von Steiner**. Sie besitzt drei Doppelgerade, die sich in einem Punkte treffen. Preis Mark 8.
4. Die Fläche besteht aus **zehn** (sechs und vier je unter sich congruenten) **Theilen**, die in **zwölf conischen Knotenpunkten** zusammenhängen. Preis Mark 23.
5. Die Fläche besteht aus **sechs congruenten Theilen**, die in **vier uniplanaren Knotenpunkten** zusammenhängen. Preis Mark 21.
6. Die Fläche besteht aus **vier congruenten Theilen**, die in **vier uniplanaren Knotenpunkten** zusammenhängen. Preis Mark 23.
- 7, 8. Zwei Modelle der **Dupin'schen Cyclide** mit den Schnittcurven mehrerer doppelt berührenden Ebenen. Preis zusammen Mark 12.
9. **Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden**: geometrischer Ort der Krümmungskreise der Normalschnitte einer beliebigen Fläche in einem positiv gekrümmten Flächenelement. Preis Mark 6. (Vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Theil, 3. Aufl., Cap. VI., §. 308).

Die Verlagshandlung hat von Herrn Professor Dr. *Kummer* in Berlin die Erlaubniss zur Entnahme von Copien der von ihm gefertigten und dem

math. Seminar der kgl. Universität zu Berlin überlassenen Modelle erhalten. Diese Förderung ihrer Absichten von berufenster Seite erfüllt sie mit Genugthuung und verpflichtet sie zu um so lebhafterem Dank, als diese bisher unveröffentlichten Modelle des berühmten Geometers zu den schönsten und elegantesten gehören, die bisher entstanden sind. Mit gütiger Einwilligung des Herrn Professor Dr. *Weierstrass* in Berlin wurden die Copien unmittelbar von den Originalen entnommen.

Bei der Bedeutung des Gegenstandes, den die Modelle darstellen — es befindet sich z. B. die berühmte Steiner'sche Fläche darunter — und mit Rücksicht auf das Interesse, welches sich zur Zeit überhaupt an die Theorie der Flächen vierter Ordnung knüpft, hegt die Verlagshandlung die Uezeugung, dass auch dieser neue bedeutsame Zuwachs zu ihrem von Jahr zu Jahr sich ausdehnenden Modell-Verlag seinen Weg in die Sammlungen von Unterrichtsmitteln der Universitäten und technischen Hochschulen in Kürze finden wird.

Ganze Serie: 120 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 5. —. pro ganze Serie in Anrechnung.

Den Modellen 1—6 liegt ein Abdruck der in den Monatsberichten der Berliner Academie von 1863, 1866 und 1872 erschienenen Besprechungen der Modelle von Herrn Kummer bei.

Darmstadt, 1883.

Zehnte Serie.

I. Nachtrag

zu den im math. Institut der k. techn. Hochschule in München unter Leitung
von Prof. Dr. *Brill* angefertigten Modellen, nebst zwei Modellen
von Dr. *O. Staude*.

1. **Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen** mittelst Seifenlösung. Preis der 11 Gestelle 12 Mark.
 - a. Zwei Ringe mit Griff und Füßen zur Darstellung der Rotationsflächen constanten mittlerer Krümmung (Plateau, *Statique des liquides*, T. 1. p. 93—103).
 - b. Schraubenlinie zur Darstellung der windschiefen Schraubenfläche (ibid. p. 216).
 - c—g. Kanten des Octaeders, der vierseitigen Pyramide, des dreiseitigen Prisma's, des Tetraeders und Würfels (vgl. Schwarz, Bestimmung einer speciellen Minimalfläche 1871, p. 84).
 - h. Kanten des sechsseitigen Prisma's (ibid. p. 93).
 - i. Drahtgestell zur Darstellung der ersten der fünf von Scherck (Crelle's Journal, XIII. p. 185) angegebenen Minimalflächen.
 - k. Zwei rechtwinklig gekreuzte Rechtecke zur Darstellung der fünften Scherck'schen Minimalfläche.

(Nebst einer Anweisung zur Herstellung der Seifenlösung.)
2. **Zwei Modelle für Fadenconstructions des Ellipsoids**, von Dr. *O. Staude*. Mit zwei Abhandlungen. Preis Mark 12.
 - a. Construction aus den beiden Focalcurven.
 - b. Construction aus einem confocalen Ellipsoid und Hyperboloid.
3. **Dreiaxiges Ellipsoid** in Gips, längs eines Kreisschnittes in zwei Theile zerlegbar. Preis Mark 4.
4. Nr. XXVII. **Modell einer Fläche vierter Ordnung** mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden. Von stud. math. *S. Finsterwalder*. (Grösse 10 cm.) Preis Mark 3. 50.
5. Nachtrag zu den Dupin'schen Cycliden der 5. Serie (Nr. XVI).
Parabolische Cyclide mit vier imaginären Knotenpunkten. Modellirt von stud. math. *S. Finsterwalder*. Mit einer Abhandlung. (Grösse des Modells: 12—20 cm.) Preis Mark 10.
6. Zur 5. Serie Nr. XIII. **Flächenstreifen von constantem positiven Krümmungsmass** aus dünnem Messingblech. Preis zusammen Mark 4. 50.
7. Nachtrag zu den Wellenflächen der 6. Serie (Nr. 1—4).
 ad. 3. **Die Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle** mit positiver Doppelbrechung, dessen Axenverhältnisse ungefähr dem Zinnober entsprechen. (Grösse 9 cm.) Preis Mark 4.

II. Nachtrag.

XXVIII. Drei Typen von Cycliden, für welche die Krümmungslinien Kreise und sphärische Curven vierter Ordnung sind. Von *S. Finsterwalder*. Preis zusammen Mark 12.

Nebst einer Abhandlung von *S. Finsterwalder*.

XXIX. Fläche achter Ordnung, die durch Bewegung einer Kreislinie entsteht, deren Ebene senkrecht zur Ebene zweier sich senkrecht schneidender Geraden bleibt, während die Endpunkte eines Durchmessers bzw. auf dieser Geraden gleiten; oder: durch Bewegung des Randes einer Kreisscheibe, welche gegen eine verticale und eine horizontale Wand gelehnt aus der verticalen in die horizontale Lage gleitet. Von *S. Finsterwalder*. Preis Mark 4.

XXX. Zwölf Typen von Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptoten- (Haupttangenten-) Curven. Von *G. Herting*. Preis der Collection: Mark 60.

Es befindet sich darunter die Fläche, die durch Umdrehung der Sinuslinie um eine Axe senkrecht zur Wellenrichtung entstanden ist (diese Eine mod. von *H. Sievert*), ferner solche, für welche die Projection der Asymptoten-curven auf eine Ebene senkrecht zur Umdrehungsaxe ein System von Kreisen, von logarithmischen und anderen Spiralen, von Pascal'schen Schneckenlinien u. s. w. ist.

Nebst einer Abhandlung von *G. Herting*.

XXXI. Bohnenförmig gestaltete Körper zur versuchsweisen Bestimmung der parabolischen Curve, der Krümmungs- und Asymptotenlinien u. s. w. Preis zusammen Mark 1. 50.

XXXII. Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien. Von Dr. *A. v. Braunmühl*.

a) Auf einem dreiaxigen Ellipsoid.

b) Auf einem grossen abgeplatteten Rotationsellipsoid (zur Demonstration mit gespanntem Faden, der an einem Stift in dem Ausgangspunkt befestigt ist, geeignet).

c) Auf einem grossen verlängerten Rotationsellipsoid (desgleichen).

Preis zusammen Mark 14.

XXXIII. Dreiaxiges Ellipsoid mit dem Axenverhältniss 1:2:3. Preis Mark 1. 20.

XXXIV. Nachtrag zu den Modellen von Flächen von constantem negativem Krümmungsmass:

Zwei Flächenstreifen von constantem negativem Krümmungsmass aus biegsamem Messingblech, mit deren Hilfe das Aufbiegen einer solchen Fläche auf eine andere und deren Verschieblichkeit in sich, überhaupt der Begriff einer »Geometrie« auf diesen Flächen erläutert werden kann. Das Krümmungsmass ist dasjenige von Nr. X. der zweiten Serie. Preis Mark 4.—.

Preis der ganzen Serie: 135 Mark,

» **des I. Nachtrags:** 45 »

» **» II.** » 90 »

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 12.—. pro ganze Serie in Anrechnung.

» 5.—. beim I. Nachtrag.

» 7.—. » II. »

Darmstadt, 1885.

Elfte Serie.

Acht Modelle

über die Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projektionen einer unebenen Kurve von denen der Kurve selbst.

Von

Geh. Hofrath Dr. **Chr. Wiener,**

Professor an der Grossh. polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Wenn sich auf einer unebenen Kurve ein Punkt und mit ihm die Tangente und die Schmiegungeebene der Kurve hinbewegt, so kann an einer Stelle jedes dieser Elemente seinen Bewegungssinn beibehalten oder ihn umkehren. Dieses Verhalten wird der Charakter der Kurve und ein umkehrendes Element ein Rückkehrelement genannt. Durch Verbindung der verschiedenen Charaktere treten acht Möglichkeiten ein. — Die Projektion der Kurve auf eine Ebene zeigt im allgemeinen für den Punkt und die Tangente dieselben Charaktere wie die unebene Kurve selbst. Nur bei den Projektionen auf die drei Hauptebenen, die Schmiegunge-, die Normal- und die rektificirende Ebene, zeigen sich Aenderungen der Charaktere, so dass hier Spitzen und Wendepunkte in der Projektion auftreten können, die an der Kurve nicht vorhanden sind, und solche verschwinden, die sich an der Kurve befinden.

Die Modelle zeigen die acht möglichen Fälle. Sie stellen die Kurven aus Draht und die Projektionen auf die drei Hauptebenen durch Zeichnung dar und lassen durch Visiren oder Schattenwerfen die Abhängigkeit ihrer Charaktere, und durch allmähliche Aenderung der Projektionsrichtung die Entstehung der Singularitäten der Projektionen erkennen.

Ganze Serie: 45 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 1.—. pro Serie in Anrechnung.

Darmstadt, 1884.

mittelst Fäden dargestellten Tangenten. In den Ebenen je dreier Kegelspitzen treffen sich die Tangenten parweise und bilden so die aus vier rationalen ebenen Curven vierter Ordnung zusammengesetzte Doppelcurve der abwickelbaren Fläche. Jede dieser vier Curven besitzt in drei Kegelspitzen Doppelpunkte, von denen je einer isolirt ist. Die Punkte der Doppelcurve sind da, wo sich zwei Fäden treffen, wieder durch Perlen bezeichnet. Da sie aber auch isolirte Theile enthält, in denen sie die Fläche verlässt, so zeigen Drähte ihren vollständigen Verlauf an. Die Zwickpunkte der Doppelcurve, in denen die isolirten Theile auf die Fläche stossen, sind die Schnittpunkte der vier Ebenen, in denen sie liegt, mit der Raumcurve.

Diese Punkte sind auch bezüglich der Raumcurve ausgezeichnet, indem sie singuläre Punkte derselben sind. Sie besitzen nämlich Rückkehrschmiegungebenen (diese Singularität ist im zweiten Modell der Serie XI. dargestellt). Es ist dadurch zugleich der allgemeine Satz veranschaulicht, dass in einem derart singulären Punkt einer beliebigen Raumcurve die abwickelbare Fläche diese verlässt und weiterhin isolirt verläuft.

Das dritte Modell, welches die Curve darstellt, durch die nur zwei reelle Kegel gehen, vereinigt für diesen Fall, was für den ersten in zwei Modelle getrennt ist.

Das vierte Modell stellt die Raumcurve vierter Ordnung dar, durch welche kein reeller Kegel geht. Da die Curve die Eigenthümlichkeit hat, dass sie nur auf geradlinigen Flächen zweiter Ordnung liegt, so war es möglich, sie durch zwei Hyperboloide herzustellen, von welchen je eine Schaar von Erzeugenden durch eine Anzahl von Fäden veranschaulicht ist. Die vier imaginären Kegelspitzen liegen parweise auf zwei reellen Geraden und diese sind einander conjugirt in Bezug auf jedes der beiden Hyperboloide, d. h. sie sind Gegenkanten von zwei Tetraedern, deren übrige Kanten durch Erzeugende je einer der Fläche gebildet sind. Diese Erzeugenden sind durch besondere Fäden, jene Gegenkanten durch Drähte hervorgehoben. Jeder von diesen schneidet die beiden Hyperboloide in sich trennenden Punktepaaren, den Eckpunkten der Tetraeder. Die Involution, der diese Punktepaare angehören, hat die imaginären Kegelspitzen zu Doppelpunkten.

Die abwickelbare Fläche ist auch hier angegeben, sie zerfällt, wie die Curve selbst, in zwei Theile, die in diesem Falle vollständig getrennt sind, indem ihre Doppelcurve durchweg imaginär ist.

Es stellen die ersten beiden Modelle die Gebilde in der grössten auftretenden Vollständigkeit dar; in dem einfacheren Falle konnten sie in einem einzigen Modelle, dem dritten, vereinigt werden; das vierte Modell zeigt von den anderen völlig verschiedene, besonders interessante Formen.

Zum Schluss mag noch auf die verschiedenen Formen hingewiesen werden, welche die Projectionen der Raumcurve auf eine Ebene annehmen. Dieselben sind Curven mit zwei Doppelpunkten und erschöpfen sämtliche Formen, die eine solche Curve aufweisen kann. Auch hier tritt, wie bei den Raumcurven, der Unterschied derer mit zwei paren Aesten, einem einzigen Ast, oder zwei unparen Aesten auf. Aber in jeder dieser Abteilung treten noch sehr verschiedenartige Formen auf, welche erkannt werden, wenn man das Auge in die verschiedenen Teile des Raumes bringt, die durch die Kegel und die abwickelbare Fläche begrenzt werden. So sind allein bei der Curve des ersten Falles 18 verschiedene Formen der Projection zu unterscheiden, während im zweiten und dritten Falle 11 bezw. 3 verschiedene Formen auftreten.

Die Anregung zur Anfertigung dieser Modelle hat der Verfasser durch seinen Vater erhalten, indem er schon in seiner Studienzeit am Polytechnikum zu Karlsruhe ein zu dieser Gruppe gehöriges Modell für die Sammlung des Unterrichts für darstellende Geometrie ausführte.

Preis der ganzen Serie: 380 Mark.

Bei Einzel-Bezug der Modelle kostet Nr. 1 110 Mark, Nr. 2 110 Mark,
Nr. 3 110 Mark, Nr. 4 70 Mark

excl. Emballage und Versandkosten: für erstere kommen bei Bezug der ganzen Serie Mk. 6. —. in
Anrechnung, bei Bezug einzelner Modelle werden dieselben nach Verhältniss berechnet.

Darmstadt, 1884.

Dreizehnte Serie.

Faden-Modelle der Regelflächen vierter Ordnung.

Von

Dr. Karl Rohn,

Professor der Mathematik an der königl. technischen Hochschule zu Dresden.

Die aus 10 Modellen bestehende Serie enthält:

- Nr. 1. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden und vier Pinchpoints auf jeder derselben.** Sie besteht aus zwei Theilen, auf welchen je ein Stück von jeder Doppelgeraden liegt.
- » 2. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden ohne Pinchpoints.** Die beiden Mäntel der Fläche durchsetzen sich gegenseitig längs der beiden Doppelgeraden.
- » 3. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden und vier Pinchpoints auf einer derselben.** Die beiden Mäntel dieser Fläche enthalten je ein Stück der einen Doppelgeraden und durchschneiden sich gegenseitig längs der andern.
- » 4. **Regelfläche mit zwei conjugirt imaginären Doppelgeraden;** sie besteht aus zwei hyperboloidartigen Flächentheilen.
- » 5. **Regelfläche mit Selbstberührungsgeralen und vier Pinchpoints auf derselben.** Diese Fläche besitzt zwei gleichartige Theile und geht aus der Fläche 1 durch Zusammenrücken der beiden Doppelgeraden hervor.
- » 6. **Regelfläche mit einer dreifachen Geraden und vier Pinchpoints auf derselben;** diese Fläche besitzt noch eine einfache Leitgerade.
- » 7. **Regelfläche mit einer dreifachen Geraden und zwei constanten Tangentialebenen längs derselben;** d. h. die Erzeugende, welche die Fläche beschreibt, geht zweimal durch die Lage der dreifachen Geraden hindurch. Es gibt auf der dreifachen Geraden zwei höhere singuläre Punkte.
- » 8. **Regelfläche mit einem Doppelkegelschnitt und einer ihn schneidenden Doppelgeraden.** Als Doppelkegelschnitt ist ein Kreis gewählt, auf demselben, sowie auf der Doppelgeraden liegen zwei Pinchpoints. Der gemeinsame Punkt des Kreises und der Doppelgeraden ist ein Selbstberührungspunkt der Fläche.
- » 9. **Regelfläche mit einer Doppelcurve dritter Ordnung und vier Pinchpoints.** Sie besteht aus einem einzigen Flächentheile, der aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung gebildet wird. Der Fläche gehören vier Tangenten der Raumcurve an, welche den Uebergang von den reellen zu den ideellen Secanten bilden.
- » 10. **Regelfläche mit einer Doppelcurve dritter Ordnung, ohne Pinchpoints.** Sie wird aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung gebildet und wiederum sind es vier Tangenten der Raumcurve, welche den Uebergang bilden. Die Fläche besteht aus einem einzigen Theile, der sich längs der ganzen Doppelcurve durchsetzt.

Schon verschiedentlich sind specielle Flächen vierter Ordnung modellirt worden; es sei nur erinnert an die Flächen mit 16 Knotenpunkten, an die Plücker'schen Complexflächen, an eine Art von Flächen mit 12 Knoten, sowie an die Cycliden. Das Modelliren solcher Flächen ist in der Regel eine Folge der genaueren Kenntniss der Eigenschaften derselben. Die Kenntniss verschiedener Eigenschaften der Regelflächen vierter Ordnung ist aber bereits früher durch mehrere Abhandlungen, und ein Einblick in ihre verschiedenen Gestalten neuerdings durch die oben erwähnte Abhandlung des Verfassers gewonnen worden, so dass die Modelle dieser Regelflächen schon aus diesem Grunde ein allgemeineres Interesse verdienen. Einen zweiten wesentlichen Grund für die Bedeutung und den Werth dieser Modelle findet der Verfasser aber darin, dass sie in der grossen Gattung der Regelflächen so ziemlich die ersten sind. Ausser einigen abwickelbaren Flächen — also Regelflächen speciellster Art — und den drei Regelflächen dritter Ordnung sind Regelflächen nicht modellirt. Und doch sind gerade die Regelflächen besonders instructiv, und die Fadenmodelle haben den grossen Vorzug, dass man ihre Contouren ihrer ganzen Erstreckung nach wirklich sehen kann. Bei den vorliegenden Regelflächen ergeben sich als Projectionen Curven vierter Klasse mit zwei resp. drei Doppeltangenten oder einer dreifachen Tangente; Curven, welche manche Eigenthümlichkeiten aufweisen.

Je nach der Art der vielfachen Curve unterscheidet man Regelflächen mit zwei Doppelgeraden, Regelflächen mit einer dreifachen Geraden, Regelflächen mit einem Doppelkegelschnitt und einer Doppelgeraden und Regelflächen mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Flächen der ersten Art stellen die Modelle I, II, III, IV und V vor, Flächen der zweiten Art die Modelle VI und VII, eine Fläche der dritten Art das Modell VIII, und endlich zwei Flächen der letzten Art die Modelle IX und X. Die Modelle I bis V geben über die Flächen der ersten Art einen Ueberblick, während bei den übrigen Arten nur die Fälle modellirt wurden, welche besonders interessant sind und ohne Modelle sich schwerer vorstellen lassen. Noch ist zu erwähnen, dass alle Modelle symmetrisch gebaut sind; dadurch gewinnen sie ungemein an Uebersichtlichkeit, ohne an ihrer Allgemeinheit einzubüssen. Bei den Flächen I, II, III und VIII, IX, X sind die Constanten ausserdem so gewählt, dass die Erzeugenden sich in windschiefe Vierseite anordnen lassen, was für die Gestalten dieser Flächen durchaus keine Specialisirung involvirt.

Den Modellen ist eine $1\frac{1}{2}$ Bogen in gr. 8^o umfassende Abhandlung beigelegt.

Preis der ganzen Serie: 380 Mark.

Bei Einzelbezug der Modelle kosten Nr. 1, 4 und 5 je 36 Mark, Nr. 3, 6, 7, 9 und 10 je 40 Mark und Nr. 2 und 8 je 44 Mark

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen Mk. 10.—. pro ganze Serie in Anrechnung.

Darmstadt, 1886.

Vierzehnte Serie.

Modelle zur Functionentheorie.

Gipsabgüsse nach den im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen.

Fünfte Folge. (14. Serie.)

Ausgeführt

unter Leitung von Prof. Dr. Walther Dyck.

Die vorliegende Serie von Modellen ist entstanden im Anschluss an eine einleitende Vorlesung über Functionentheorie. Die Schwierigkeit einer möglichst anschaulichen Schilderung des Verhaltens einer Function in der Umgebung singulärer Stellen liess den Wunsch aufkommen, auch auf diesem Gebiete und wenigstens für die wichtigsten singulären Vorkommnisse das Hilfsmittel räumlicher Anschauung zu besitzen, das schon auf einer Reihe anderer Gebiete — und besonders durch die von den früheren Leitern des Münchner mathematischen Instituts ausgegangene Anregung — so zweckmässig und fördernd im Unterricht sich erwiesen hat.

Um für gewisse singuläre Punkte einer Function, dann auch für den Gesamtverlauf gewisser Functionstypen eine räumliche Darstellung zu gewinnen, sind (in der bekannten Weise) der reelle und der imaginäre Theil der Werthe einer Function über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So entstehen für jede Function zwei Flächen (mit R und I bezeichnet) deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufes liefert. Auf den Flächen (für welche gleichmässig die Einheit des Massstabes zu 3 cm. gewählt wurde) ist ein System von Niveaulinien und deren Orthogonaltrajectorien aufgetragen. Die durch Projection dieser Curvensysteme auf die Ebene des complexen Arguments entstehenden quadratischen Systeme sind (mit Ausnahme von Nr. IV und V, wo es sich nur um die ganz bekannten Kreissysteme handelt) in besonderen Tafeln den Modellen beigegeben; ebenso ist den Modellen ein erläuternder Text beigelegt, welcher in Kürze die wichtigsten geometrischen wie analytischen Beziehungen für die einzelnen dargestellten Functionen entwickelt und auf den bezüglich der näheren Ausführungen hier verwiesen sein mag.

Die Serie enthält folgende Darstellungen:

Die Modelle I, II und III veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen, und zwar:

- I. Für $w^2 = z^2 - 1$. Zwei Modelle (Grösse 12—12—12 cm.), ausgeführt von Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. Preis für a. und b. je 10 Mark.
- II. Für $w^2 = z^4 - 1$. Zwei Modelle (Grösse 12—12—12 cm.), ausgeführt von Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. Preis für a. und b. je 14 Mark.
- III. Für $w^4 = 1 - z^2$. Ein Modell (Grösse 12—12—12 cm.), ausgeführt von Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. Preis 16 Mark.

Die Modelle IV und V dienen zur Darstellung des Zusammenrückens zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte in einen (einfachen) algebraischen und zwar gibt:

- IV. Die Function $w = \frac{1}{z}$. Ein Modell (Grösse 12—12—12 cm.), ausgeführt von Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. Preis 11 Mark.
- V. Die Function $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon} \left(\varepsilon = \frac{\pi}{4} \right)$. Zwei Modelle (Grösse 12—12—12 cm.), ausgeführt von Assistent *H. Burkhardt* und stud. math. *J. Kleiber*. Preis für a. und b. je 11 Mark.

Modell VI gibt das Verhalten einer Function in der Umgebung des einfachsten, wesentlich singulären Punktes durch

- VI. $6w = e^{\frac{1}{6z}}$. Ein Modell (Grösse 17—18—15 cm.), ausgeführt von stud. math. *J. Kleiber*. Preis 18 Mark.

Die Modelle VII—X veranschaulichen den Verlauf der elliptischen Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ (in der Weierstrass'schen Normalform) und zwar speciell:

- VII. u. VIII. für die Invarianten $g_2 = 4$, $g_3 = 0$. Drei Modelle (Grösse 16—16—16 cm.), berechnet und ausgeführt von Assistent *H. Burkhardt* und Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. Preis für VIIa. und b. je 32 Mark, für VIII. 36 Mark.
- IX. u. X. für die Invarianten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. Vier Modelle (Grösse 15—22—16 cm.), berechnet und ausgeführt von Assistent *H. Burkhardt* und Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. Preis für IX a. und b. je 35 Mark, für X a. und b. je 38 Mark.

Beigegeben ist ein erläuternder Text zu sämtlichen Modellen (1 Bogen gr. 8^o umfassend), sowie (in 5 Tafeln) die Darstellung der auf den Flächen eingetragenen Curvensysteme.

Preis der ganzen Serie: 330 Mark,

excl. Emballage und Versandkosten: für erstere kommen Mk. 16. —. pro ganze Serie in Anrechnung.

Darmstadt, 1886.

Fünfzehnte Serie.

I. Projektions-Modelle

der vier ersten regelmässigen vier-dimensionalen Körper.

Von

Dr. Victor Schlegel

in Hagen i. W.

- Nr. 1. **Fünfzell**, dargestellt durch ein in 4 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 10 Flächen, 10 Kanten, 5 Ecken. **Preis 1 Mark 20 Pf.**
- » 2. **Achtzell**, dargestellt durch ein in 7 Hexaeder zerlegtes regelmässiges Hexaeder. Der Körper enthält 24 Flächen, 32 Kanten, 16 Ecken. **Preis 4 Mark 50 Pf.**
- » 3. **Sechzehnzell**, dargestellt durch ein in 15 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 32 Flächen, 24 Kanten, 8 Ecken. **Preis 4 Mark.**
- » 4. **Vierundzwanzigzell**, dargestellt durch ein in 23 Oktaeder zerlegtes regelmässiges Oktaeder. Der Körper enthält 96 Flächen, 96 Kanten, 24 Ecken. **Preis 18 Mark.**

Im vier-dimensionalen Raume gibt es, entsprechend den fünf regelmässigen Körpern des gewöhnlichen Raumes, sechs regelmässige Gebilde, welche von regelmässigen Tetraedern, Hexaedern, Oktaedern oder Dodekaedern so begrenzt werden, dass in jeder Ecke gleichviele Kanten, Flächen und Körper, und in jeder Kante gleichviele Flächen und Körper zusammenstossen. Diese Gebilde sind: 1) das Fünfzell, begrenzt von 5 Tetraedern, 2) das Achtzell, begrenzt von 8 Hexaedern, 3) das Sechzehnzell, begrenzt von 16 Tetraedern, 4) das Vierundzwanzigzell, begrenzt von 24 Oktaedern, 5) das Einhundertzwanzigzell, begrenzt von 120 Dodekaedern, 6) das Sechshundertzell, begrenzt von 600 Tetraedern. — Obwohl diese Gebilde selbst unserer Anschauung unzugänglich sind, kann man dennoch Projectionen derselben im drei-dimensionalen Raume construiren, welche alle an den Gebilden befindlichen Ecken, Kanten, Flächen und Körper in ganz analoger Weise zur Darstellung bringen, wie eine ebene Abbildung die Ecken, Kanten und Flächen eines regelmässigen Polyeders. Diese Projektionskörper enthalten gleichzeitig die Lösung eines rein stereometrischen Problems, nämlich: Ein Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder so in Körper derselben Art zu zerlegen, dass in jeder Ecke gleichviele Kanten, Flächen und Körper, und in jeder Kante gleichviele Flächen und Körper zusammenstossen.

Die hier angezeigten Modelle bringen die vier ersten jener vier-dimensionalen Gebilde in Centralprojektion zur Darstellung, wobei das Projektions-Centrum so gedacht ist, dass kein Grenzkörper einen andern durchdringt, und ein einziger als Ganzes alle übrigen als seine Theile in sich schliesst.

In allen Modellen sind die Körper durch ihre in Draht und Seide ausgeführten Kanten zur Darstellung gebracht, so zwar, dass die Grenzkanten jeder Polyeder-Schicht in Draht, dagegen die Verbindungskanten je zweier auf einander folgender Schichten in verschiedenfarbiger Seide ausgeführt sind.

Die Modelle aller 6 regelmässigen Körper wurden zum ersten Male auf der 57. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte (1884) in Magdeburg ausgestellt.

Eine Abhandlung ist beigelegt.

Preis sämmtlicher vier Modelle: 26 Mark,

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommt Mk. 1. —. zur Anrechnung.

II. Bestimmung der Fläche,

auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird.

Von

Dr. K. Reinbeck

in Einbeck.

Das vorliegende Modell stellt diejenige Fläche dar, auf welche das Ellipsoid vermöge der punkweisen Zuordnung durch parallele Normalen in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet wird.

Das Modell soll die Eigenschaft dieser Fläche zur Anschauung bringen — soweit dieses überhaupt durch ein Modell möglich ist —, dass dieselbe durch die beiden Schaaren ihrer Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden kann.

Ausserdem ist hervorzuheben, dass dies Modell zugleich ein Hilfsmittel darbietet, um eine Vorstellung von der Gestalt derjenigen Flächen zu gewinnen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades, d. h. die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloiden durch parallele Normalen conform abgebildet werden.

Preis des Modells: 12 Mark,

excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommt Mk. 1. —. in Anrechnung.

Darmstadt, 1886.

Sechzehnte Serie.

I.

Modelle zur Lehre von den confokalen Flächen zweiten Grades

im Anschluss an einige von Herrn Professor Dr. E. R. Neovius in Helsingfors angefertigte Modelle.

Krümmungslinien des Ellipsoids. Conforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel. Confokale Flächen zweiten Grades.

Wenn es sich darum handelt, auf einem Modelle einer Fläche zweiten Grades, insbesondere auf der Oberfläche eines Ellipsoids, die beiden Schaaren der Krümmungslinien dieser Fläche durch eine grössere oder kleinere Anzahl der zu diesen Schaaren gehörenden Curven zur Anschauung zu bringen, und wenn zugleich die wohlberechtigte Forderung gestellt wird, dass diese Curven möglichst gleichmässig auf der Fläche vertheilt sein sollen, so ist die Auswahl der auf dem Modelle ersichtlich zu machenden Curven keineswegs willkürlich.

Da nun die Flächen zweiten Grades die Eigenschaft haben, durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden zu können, so liegt der Gedanke nahe, bei der erwähnten Auswahl von der Forderung auszugehen, dass je zwei benachbarte der zur Anschauung zu bringenden Krümmungslinien der einen Schaar und je zwei solche benachbarte Krümmungslinien der andern Schaar auf dem Ellipsoid ein krummliniges Viereck begrenzen sollen, welches in gewissem Sinne einem Quadrate möglichst nahe kommt.

Die Unbestimmtheit, mit welcher diese Forderung behaftet zu sein scheint, verschwindet, sobald diejenige conforme Abbildung der Ellipsoidoberfläche auf eine Ebene ins Auge gefasst wird, bei welcher den Krümmungslinien des Ellipsoids gerade Linien der Ebene entsprechen.

Es entsteht auf diese Weise die Aufgabe, zu untersuchen:

„Wie muss ein Ellipsoid beschaffen sein, damit die Oberfläche desselben durch seine Hauptschnitte und eine endliche Anzahl seiner Krümmungslinien in eine endliche Anzahl solcher krummliniger Vierecke getheilt werden könne, welche sämmtlich in Rücksicht auf die erwähnte conforme Abbildung Quadraten möglichst nahe kommen?“

Diese Frage hat Herr Dr. E. R. Neovius, Professor der Mathematik an der Universität zu Helsingfors, in einer Abhandlung beantwortet, welche unter dem Titel: »Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf eine die Krümmungslinien eines Ellipsoids betreffende Aufgabe« im Jahre 1885 im 15. Bande der Acta Societatis Scientiarum Fennicae veröffentlicht worden ist.

Gleichzeitig mit der erwähnten Abhandlung sind der Finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften einige Modelle vorgelegt worden, durch welche das Ergebniss der angestellten Untersuchung für einen ausgewählten speciellen Fall in höchst instructiver Weise zur Anschauung gebracht wird.

Modell I. Ellipsoid mit drei Hauptschnitten und achtzehn Krümmungslinien. Von Prof. Neovius.

Dieses Ellipsoid, dessen Constanten von Prof. Neovius berechnet worden sind, ist durch folgende Festsetzungen bestimmt:

- a. Die Halbaxen des Ellipsoids sollen die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden.
- b. Die Fläche jedes Octanten des Ellipsoids soll durch vier Krümmungslinien der den einschaligen confokalen Hyperboloiden entsprechenden Schaar und fünf Krümmungslinien der den zweischaligen confokalen Hyperboloiden entsprechenden Schaar in $5 \cdot 6 = 30$ krummlinige Vierecke zerlegt werden können, welche in dem angegebenen Sinne Quadraten möglichst nahe kommen.

Bei diesem Modelle lässt die durch die Verfolgung des angegebenen Gedankens erreichte Gleichmässigkeit der Vertheilung der zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien kaum etwas zu wünschen übrig. In dieser Beziehung dürfte dieses Modell alle anderen bisher in den Handel gebrachten Ellipsoid-Modelle, auf denen Krümmungslinien zur Anschauung gebracht sind, übertreffen.

Aus dem angegebenen Grunde eignet sich dieses Modell in vorzüglicher Weise auch zur anschaulichen Erläuterung der Bedeutung des Satzes, dass die Oberfläche eines Ellipsoids durch die beiden Schaaren der Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden kann.

Die Hauptschnitte des Ellipsoids sind durch rothe, die übrigen zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien sind durch schwarze Linien bezeichnet.

Modell II. Rechteckige Platte, beiderseitig mit geraden Linien versehen, welche einzeln den auf dem Modell I. ersichtlich gemachten krummen Linien entsprechen.

Dieses Modell dient zur Veranschaulichung der conformen Abbildung der Oberfläche des durch das Modell I. dargestellten Ellipsoids auf die doppelt zu denkende

Fläche eines Rechtecks. Die Eckpunkte des Rechtecks entsprechen den Nabelpunkten des Ellipsoids. Den Krümmungslinien des Ellipsoids entsprechen hierbei Parallelen zu den Seiten des Rechtecks.

Modell III. Kugel mit drei grössten Kreisen und achtzehn confokalen sphärischen Kegelschnitten. Von Prof. Neovius.

Diese Kugel stellt dar diejenige conforme Abbildung der Oberfläche des durch Modell I. dargestellten Ellipsoids auf eine Kugel, bei welcher den drei Hauptschnitten des Ellipsoids drei grösste Kreise der Kugel entsprechen.

Wegen der Einzelheiten, insbesondere bezüglich der Bestimmung der Werthe derjenigen Constanten, welche bei der Herstellung der Modelle I., II. und III. zu Grunde gelegt worden sind, wird auf die angeführte Abhandlung des Hrn. Prof. Neovius verwiesen.

Zu den Modellen I. und III. gehört ein gemeinsamer **Holzuntersatz**, welcher dazu dient, beide Modelle in eine solche Lage zu bringen, dass die Mittelpunkte derselben sich in gleicher Höhe befinden, während die Ebenen der drei einander entsprechenden Hauptschnitte parallele Lage erhalten.

Die Modelle IV—IX

sind zunächst hergestellt in Exemplaren, welche sich in der unter Leitung von Herrn Professor H. A. Schwarz stehenden Königl. Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle der Universität Göttingen befinden.

Modell IV. Einschaliges Hyperboloid.

Das durch dieses Modell dargestellte einschalige Hyperboloid ist zu dem durch Modell I. dargestellten Ellipsoid confokal und geht durch eine der auf dem Modelle dieses Ellipsoids zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von jeder der beiden Schaaren der geradlinigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids sind auf dem Modelle 32 Individuen zur Anschauung gebracht.

Modell V. Zweischaliges Hyperboloid.

Dieses Modell besteht aus zwei, durch eiserne Stäbe mit einander verbundenen Stücken.

Das durch dieses Modell dargestellte zweischalige Hyperboloid ist zu dem durch Modell I. dargestellten Ellipsoid und zu dem durch Modell IV. dargestellten einschaligen Hyperboloid confokal und geht durch eine der auf dem Ellipsoidmodelle zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch.

Modell VI. Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confokalen einschaligen Hyperboloid. Durchdringung der Modelle I. und IV.

Modell VII. Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confokalen zweischaligen Hyperboloid. Durchdringung der Modelle I. und V.

Modell VIII. Vereinigung eines einschaligen Hyperboloids mit einem confokalen zweischaligen Hyperboloid. Durchdringung der Modelle IV. und V.

Modell IX. Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confokalen einschaligen und einem confokalen zweischaligen Hyperboloid. Durchdringung der Modelle I., IV. und V.

Die zur Herstellung der Modelle IV.—IX. erforderlichen Rechnungen und Zeichnungen sind von Herrn R. Haussner, Studiosus der Mathematik

an der Universität Göttingen, ausgeführt worden. Die Modelle VI.—IX. bilden eine Ergänzung zu den bisher in den Handel gebrachten Modellen von Flächen zweiten Grades, welche denjenigen Lehrern der höheren Mathematik gewiss höchst willkommen sein wird, die bei ihrem Unterrichte auf die Lehre von den confokalen Flächen zweiten Grades in mehr oder weniger ausführlicher Weise eingehen und den Wunsch haben, ihren Zuhörern die Gewinnung einer deutlichen Vorstellung der gegenseitigen Lage eines Ellipsoids und der beiden Arten der zu demselben confokalen Hyperboloide durch Anschauung geeigneter, in passenden Grössenverhältnissen ausgeführter Modelle zu erleichtern.

Die Modelle dieser Serie sind von Herrn Professor H. A. Schwarz der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt worden.

Preis der ganzen Serie 125 Mark.

Bei Einzelbezug der Modelle kosten Nr. I.—III. incl. Untersatz zusammen *M.* 30, Nr. IV. *M.* 13, Nr. V. *M.* 16, Nr. VI. *M.* 16, Nr. VII. *M.* 18, Nr. VIII. *M.* 18, Nr. IX. *M.* 22.

Die Preise verstehen sich excl. Emballage und Versandkosten; für erstere kommen, wenn keine Einzelverpackung der Gipsmodelle erforderlich, 7 Mark pro ganze Serie in Anrechnung.

II.

Modelle einiger Riemann'schen Flächen.

- Nr. 1. Modell einer **zweiblättrigen einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche**, welche in ihrem Innern einen Windungspunkt **erster** Ordnung enthält.
- Nr. 2. Modell einer **dreiblättrigen einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche**, welche in ihrem Innern einen Windungspunkt **zweiter** Ordnung enthält.
- Nr. 3. Modell einer **dreifach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche** mit einer in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie. (Siehe Riemann's Gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, Seite 89, Figur 3.)

Diese Modelle mit dünnen Wandungen sind aus dauerhafterem Material als Gips hergestellt, um ein Zerbrechen bei zufälligem Auffallen zu verhüten.

Preis der drei Modelle zusammen 5 Mark; bei Einzelbezug pr. Mod. 2 Mark.

Darmstadt, 1888.

Zweiter Theil.

I. Flächen zweiter Ordnung.¹⁾

Die im Folgenden aufgeführten Modelle von Flächen zweiter Ordnung in Gips sind mit Ausnahme von Nr. 3, 4 und 8 von dem Studirenden *R. Diesel* an der techn. Hochschule in München angefertigt.

A. Ellipsoide.

1. (III. 1.) Ellipsoid mit Angabe der Hauptschnitte; Axenverhältniss: $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$, grosse Halbaxe = 5 cm. (10—6 cm.) . . . *M.* 1. 40.

2. (III. 3.) Desgl.; grosse Halbaxe = 9 cm. (18—11 cm.) *M.* 1. 90.

3. (X., 2. N., xxxiii.) Ellipsoid; Axenverhältniss 3:2:1, grosse Halbaxe = 17 cm. (17—6 cm.) *M.* 1. 20.

4. (X., 1. N., 3.) Ellipsoid, längs eines Kreisschnittes in 2 Theile zerlegbar (13—7 cm.) *M.* 4. —.



5.* (Cart.-S. 1.) Ellipsoid aus Cartonscheiben, beweglich, gebildet von 22 aus Carton geschnittenen, in einander gesteckten Kreisen.

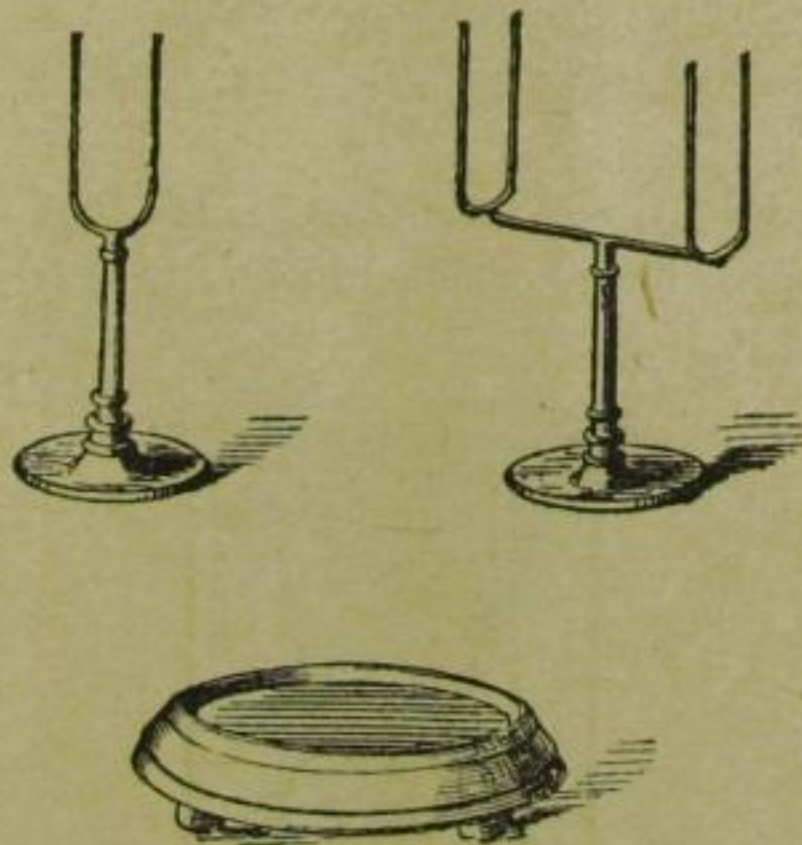
Unter Anwendung eines leichten Druckes kann man das Ellipsoid eine mehrfache Mannigfaltigkeit von Gestalten durchlaufen lassen.

¹⁾ Die Flächen zweiter Ordnung mit Krümmungslinien, geodätischen Linien u. s. w. finden sich unter V. A. aufgeführt.

(Diese Bemerkung gilt für alle Cartonmodelle; Erläuterung hierzu, von Prof. Dr. Brill verfasst, wird denselben beigegeben.)

6.* (Cart.-S. 2.) Dasselbe, anderer Construction, gebildet aus 30 Kreisen.

7. Messinggabel mit Holzfuss, zur Aufstellung eines der Cartonmodelle Nr. 5, 6 dienlich, auch für die Mod. Nr. 10, 16, 22, pro Stück *M.* 1. 50.

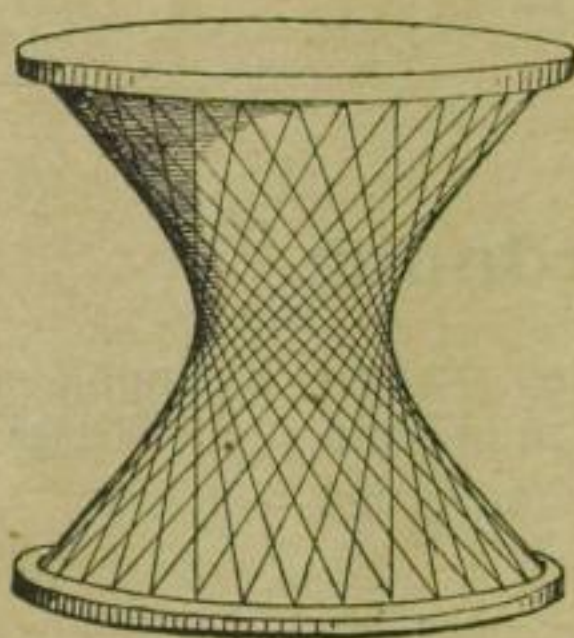


Gestelle und Gabeln zum Aufstecken sämtlicher Cartonmodelle, nebst Holzteller, zusammen *M.* 10. 50.

NB. Modelle von Ellipsoiden mit Krümmungslinien, geodätischen Linien u. s. w. sind unter Nr. V. A. aufgeführt.

B. Hyperboloide und Kegel.

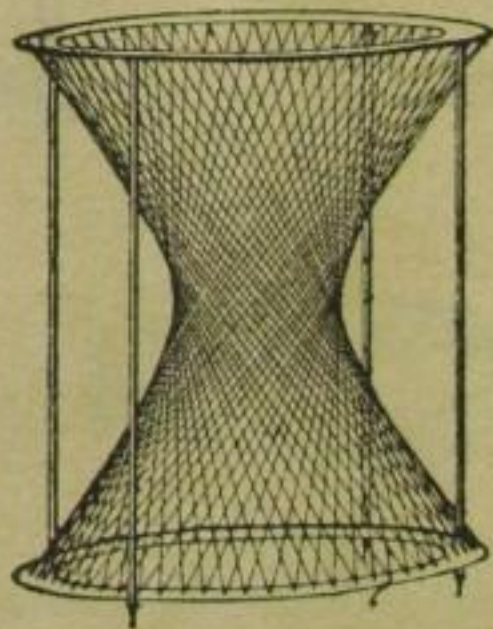
8. (III. 5.) Einschaliges Hyperboloid mit Angabe der Hauptschnitte und des Asymptotenkegels, grosse Halbaxe der Kehlellipse = 4 cm. (23—14 cm.) *N.* 8. 20.



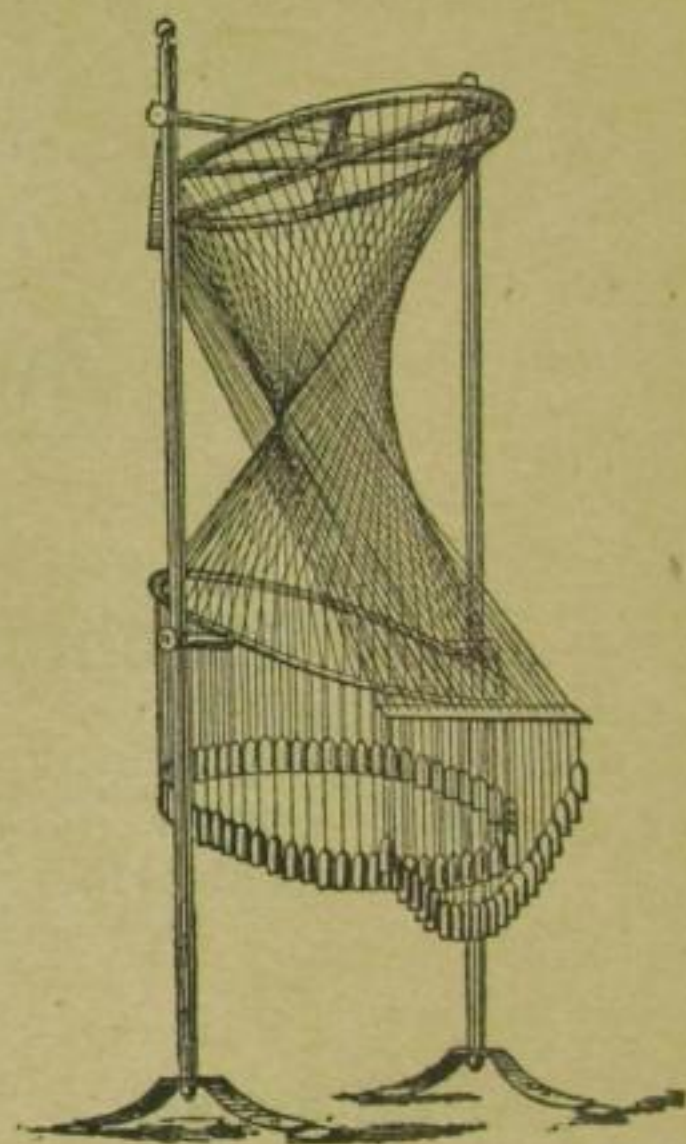
9. (III. 6.) Dasselbe mit den beiden Schaaren von Erzeugenden (23—14 cm.) *N.* 13. 60.

191. (XVI. iv.) Dasselbe, confokal zu dem durch Modell I. der XVI. Serie (Nr. 188) dargestellten Ellipsoid; geht durch eine der auf dem Modelle dieses Ellipsoids zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von jeder der beiden Schaaren der geradlinigen Erzeugenden sind 32 Individuen zur Anschauung gebracht *N.* 13. —.

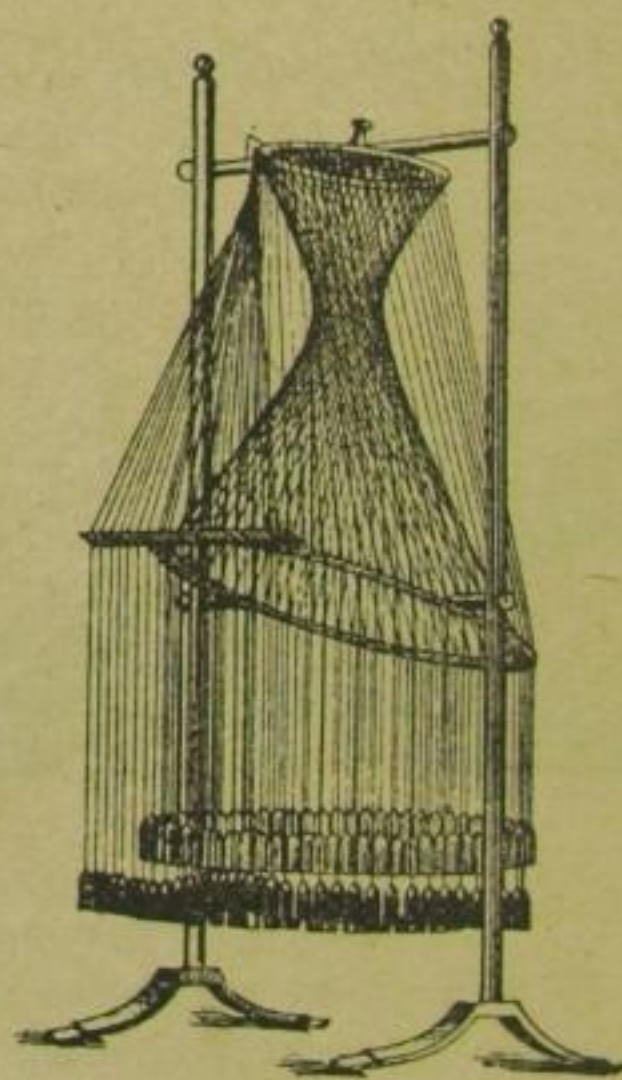
10.* (Cart.-S. 3.) Einschaliges Hyperboloid aus Cartonscheiben, bewegl., gebildet aus 34 Kreisen.



11. (IV. 1.) Einschaliges Hyperboloid, unveränderliches Fadenmodell. Es zeigt beide Systeme von Erzeugenden nebst dem Asymptotenkegel; jedes System wird durch 64 Fäden repräsentirt. Axenverhältniss der Kehlellipse 21:13. (14—24 cm.) *N.* 30. —.



12. (IV. 2.) Einschaliges Hyperboloid, bewegliches Fadenmodell, in der einen Grenzlage ein Cylinder, in der andern ein Kegel, bei gegenseitiger Neigung der Leitkreise eine Fläche vierter Ordnung. Die Beschreibung im I. Theil, IV. Serie, Nr. 2. (22—55 cm.) *N.* 70. —.



13. (IV. 3.) Bewegliches, einschaliges Hyperboloid, in beiden Grenzlagen ein Kegel. Vergl. die Beschreibung im I. Theil, IV. Serie, Nr. 3. (22—50 cm.) *N.* 75. —.

14. (III. 17.) Elliptischer Kegel; Halbaxen der Grundellipse 10,4 und 5,4 cm., Höhe 11,5 cm. Dieser Kegel ist Asymptotenkegel sowohl zum einschaligen Hyperboloid Nr. 8, wie zum zweischaligen Nr. 17. (23—13 cm.) . . . *M.* 3. 80.

15. (VI. 5.) Kreiskegel mit Ellipsen-, Hyperbel- u. Parabel-Schnitten; zerlegbar. (21—33 cm.) *M.* 22.

16.* (Cart.-S. 7.) Kegel, bewegliches Cartonmodell, gebildet aus 26 Kreisen.

17. (III. 8.) Zweischaliges Hyperboloid mit den Hauptschnitten und demselben Asymptotenkegel wie das einschalige Nr. 8. Reelle Hauptaxe = 0,93 cm. (13—23 cm.) . . . *M.* 13. 60.

192. (XVI. v.) Zweischaliges Hyperboloid mit den Hauptschnitten. Confokal zu dem durch Mod. 1. der XVI. Serie (Nr. 188) dargestellten Ellipsoid und zu dem durch Mod. iv. der XVI. Serie (Nr. 191) dargestellten einschaligen Hyperboloid; geht durch eine der auf dem Ellipsoidmodelle zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. . . . *M.* 16. —.

195. (XVI. viii.) Vereinigung eines einschaligen Hyperboloids mit einem confokalen zweischaligen Hyperboloid; Durchdringung der Modelle iv. (Nr. 191) u. v. (Nr. 192) der XVI. Serie. *M.* 18. —.

18.* (Cart.-S. 4.) Zweischaliges Hyperboloid aus Cartonscheiben, beweglich; jede Hälfte aus 24 Kreisen gebildet.

19. Zwei Messinggabeln mit Holzfuss, zum Aufstecken von Nr. 18. . . . *M.* 2. —.

NB. Modelle von Hyperboloiden mit Krümmungslinien sind unter Nr. V. A. aufgeführt.

C. Paraboloid.

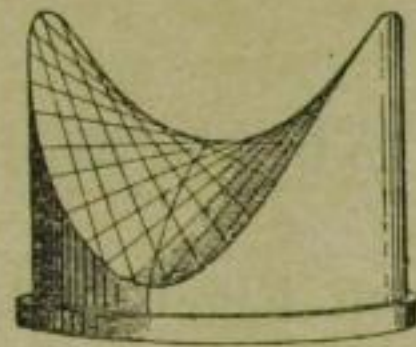
20. (III. 10.) Elliptisches Paraboloid mit den Hauptschnitten; Halbaxen der Grundellipse 9,5 und 6 cm. (6—20 cm.) . . . *M.* 2. 80.

21. (III. 11.) Dasselbe mit Schnitten parallel zur Grundellipse (6—20 cm.) . . . *M.* 3. 80.

22.* (Cart.-S. 5.) Elliptisches Paraboloid aus Cartonscheiben, beweglich, 28 Kreise.

23. (III. 13.) Hyperbol. Paraboloid (gleichseitig) mit den Hauptschnitten. Durchmesser des Begrenzungs cyl. = 14 cm. (15—13 cm.) *M.* 3. 80.

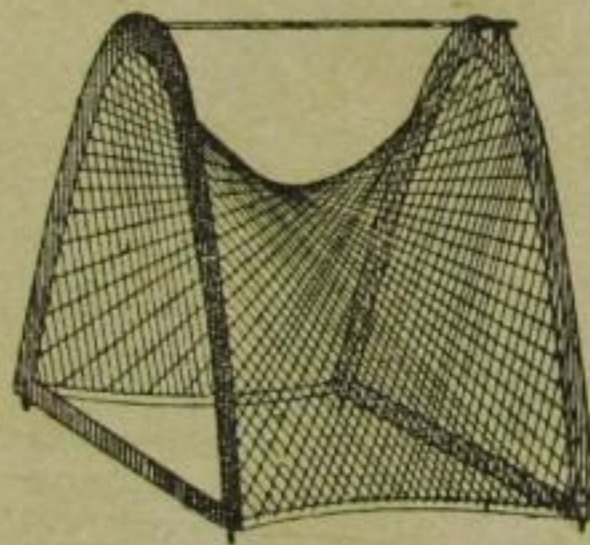
24. (III. 14.) Dasselbe mit Horizontalschnitten (gleichs. Hyperbeln) (15—13 cm.) . . . *M.* 6. 80.



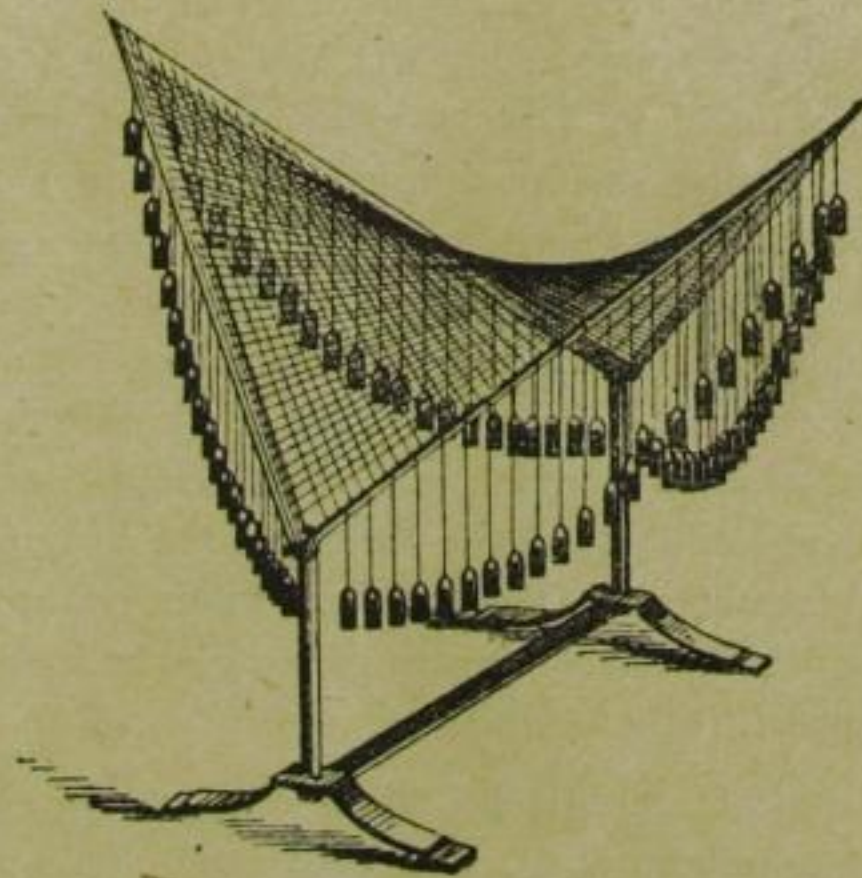
25. (III. 15.) Dasselbe mit beiden Schaaren von Erzeugenden (15—13 cm.) . . . *M.* 5. 60.

26.* (Cart.-S. 6.) Hyperbolisches Paraboloid, bewegliches Cartonmodell, gebildet aus 26 geradlinig begrenzten Schnitten.

27. Holzteller zum Aufstellen des vorigen Modells *M.* 1. —.



28. (IV. 4.) Hyperbolisches Paraboloid, unveränderliches Fadenmodell. Die Beschreibung im I. Theil, IV. Serie, Nr. 4. (18—30 cm.) *M.* 44. —.



29. (IV. 5.) Dasselbe, bewegliches Fadenmodell. Die Beschreibung im I. Theil, IV. Serie, Nr. 5. *M.* 70. —.

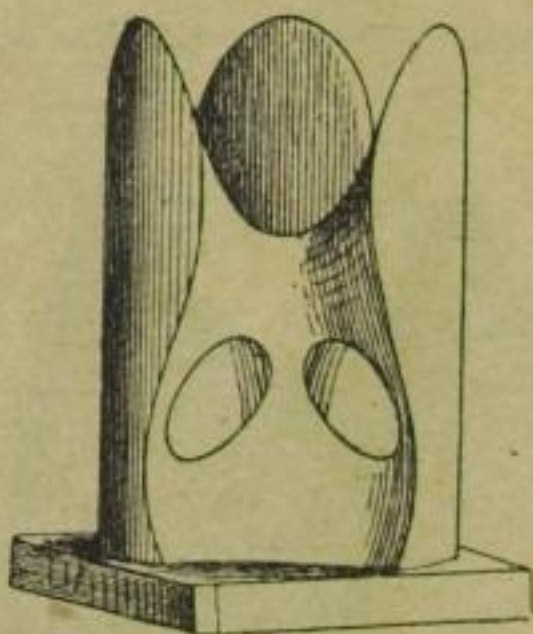
NB. Modelle von Paraboloiden mit Krümmungslinien sind unter Nr. V. A. aufgeführt.

II. Algebraische Flächen höheren Grades.

A. Serie von Flächen 3. Ordnung

nach Angabe von Prof. Dr. C. Rodenberg.

Vergleiche Rodenberg's Aufsatz: »Zur Classification der Flächen 3. Ordnung«, Mathem. Annalen Bd. XIV. pag. 46 ff. Der Serie ist eine von Rodenberg verfasste Abhandlung beigegeben.



30.* (VII. 1.) Diagonalfäche mit 27 reellen Geraden. 10 der 15 Dreiecke, welche auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung von den 15 rothen Geraden gebildet werden, und innerhalb welcher 10 Ovale der parabolischen Curve liegen, sind hier auf Punkte (Ovalpunkte) zusammengeschrumpft, in welchen sich je 3 Geraden schneiden. Die 15 rothen Geraden haben je zwei reelle Asymptotenpunkte, d. h. unter den Kegelschnitten, nach welchen alle durch eine solche hindurchgehenden Ebenen die Fläche schneiden, befinden sich 2 reelle, diese Gerade in den vorhin genannten Punkten berührende. Die 12 weissen Geraden bilden eine Doppelsechse, auf ihnen sind die Asymptotenpunkte imaginär. Mit Ausnahme der Ovalpunkte und der erwähnten Asymptotenpunkte ist die ganze Fläche negativ gekrümmt. (15—24 cm.) . . . M. 20. —.

31.* (VII. 2.) Fläche mit 4 reellen conischen Knotenpunkten C_2^* . Man erhält dieselbe durch

*) Die Buchstaben C , B , U bedeuten beziehungsweise conische, biplanare, uniplanare Knoten; der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die Classe durch die betreffende Singularität erniedrigt wird.

Zusammenziehen der 4 Hälse aus der vorherigen Fläche. In die 6 rothen Verbindungsstrahlen je zweier Knoten (Knotenstrahlen) sind je 4 Geraden hinein gefallen; die 3 weissen Geraden dagegen sind einfach (unär). Der durch die 4 Eckpunkte bestimmte tetraëderförmige Flächen-theil liegt ganz im Endlichen und ist positiv gekrümmt. (13—15 cm.)

32.* 33.* 34.* 35.* (VII. 3, 4, 5, 6.) Sämmtliche 4 Flächen sind Collineationen der Fläche Nr. 31. Je nachdem man zur Gegenebene (Ebene, die bei der Collineation zur unendlich fernen Ebene gemacht wird) eine Ebene wählt, welche den tetraëderförmigen Theil nicht trifft und die Fläche nach einer Curve dritter Ordnung mit Oval schneidet, oder von diesem Theil eine Kuppe abtrennt, oder einen Knoten des tetraëderförmigen Theils von den 3 übrigen, oder endlich 2 Knoten desselben von den 2 übrigen abscheidet, erhält man der Reihe nach aus Nr. 31 die Flächen Nr. 32, 33, 34, 35. In den drei ersten Fällen wurde ausserdem die Gegenebene horizontal gewählt, im letzten durch eine der unären Geraden (s. Nr. 31) gelegt, so dass beim Modell Nr. 35 eine dieser 3 Geraden im Unendlichen liegt. Der tetraëderförmige Theil erstreckt sich bei allen, mit Ausnahme von Nr. 32, in's Unendliche und ist immer positiv gekrümmt. (13—15 cm.)

36.* (VII. 7.) Fläche mit 3 conischen Knotenpunkten C_2 . Sie entsteht aus der Diagonalfäche durch Zusammenziehen der 3 unteren ellipsenförmigen Oeffnungen zu Knoten. Die 3 weissen Geraden sind daher unär und besitzen reelle Asymptotenpunkte, in die blauen sind 2, in die rothen (Knotenstrahlen) 4 Gerade hineingefallen. Die parabolische Curve besteht, abgesehen von den 3 als Theile derselben doppelt zählenden Knotenstrahlen, aus einer Curve sechster Ordnung mit 3 Doppelpunkten in den Knoten, deren Tangenten daselbst die blau gezeichneten Geraden sind. (11—15 cm.)

37.* (VII. 8.) Dieselbe Fläche, aber von der anderen Flächenseite betrachtet (der andere Raumtheil ausgefüllt). Sie veranschaulicht die Bildung des U_6 von Nr. 45 aus 3 C_2 . (11—15 cm.)

38.* (VII. 10.) Fläche mit einem biplanaren Knoten B_3 , dessen 2 Tangentialebenen (auch Hauptebenen genannt) reell sind und der die Classe um 3 erniedrigt. Ausser den 6 durch den B_3 gehenden, dreifach zählenden Geraden (roth) existiren noch 9 unäre (s. oben) Geraden (weiss), wovon 5 reelle, 4 imaginäre Asymptotenpunkte besitzen. Die parabolische Curve besteht aus einem paaren Zug mit 4 Schleifen und 2 Ovalen. B_3 ist ein achtfacher Punkt derselben, es gehen aber nur 4 reelle Aeste durch ihn hindurch, welche zu je zweien die beiden Hauptebenen, nicht aber die Knotenstrahlen berühren, die in denselben liegen. Die Fläche veranschaulicht die Entstehung des U_6 aus dem B_3 durch Vereinigung seiner Ebenen. (10—15 cm.)

39.* (VII. 11.) Fläche mit einem biplanaren Knoten B_3 , dessen Hauptebenen conjugirt imaginär sind. Die parabolische Curve, welche im Allgemeinen bei Flächen mit einem solchen Knoten eine aus 3 reellen Ovalen bestehende Curve 12. Ordnung mit einem isolirten achtfachen Punkt im Knoten ist, degenerirt hier in eine ebene Curve dritter Ordnung und eine Raumcurve neunter Ordnung. Die Fläche enthält nur mehr 3 reelle unäre Gerade mit reellen Asymptotenpunkten. (12—15 cm.)

40.* (VII. 9.) Fläche mit 3 reellen biplanaren Knoten B_3 , von denen jeder die Classe um 3 erniedrigt, und für welche sämmtlich die Tangentialebenenpaare reell sind. Die 3 verschiedenen Hauptebenen gehen durch je 2 der 3 Knotenstrahlen, in welche je 4 Gerade hineingefallen sind, und osculiren die Fläche längs derselben. Die Fläche ist durchaus positiv gekrümmt mit Ausnahme der Knotenstrahlen, welche, jeder als Theil der parabolischen Curve vierfach zählend, die parabolische Curve repräsentiren. (11—15 cm.)

41.* (VII. 12.) Fläche mit einem biplanaren, die Classe um 4 erniedrigenden Knoten B_4 , mit reellem Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 reellen conischen Knoten C_2 . Diejenigen beiden grünen Geraden, welche B_4 mit je einem der C_2 verbinden, zählen achtfach; die dritte grüne Gerade, in der sich die Hauptebenen von B_4 schneiden, sechsfach; der rothe Knotenstrahl vierfach; die weisse Gerade ist unär und enthält 2 reelle Asymptotenpunkte. Der zwischen den 3 Knoten gelegene Flächentheil ist (mit Ausnahme von Punkten parabolischer Krümmung) positiv gekrümmt. (13—15 cm.)

42.* (VII. 13.) Fläche mit einem biplanaren, die Classe um 4 erniedrigenden Knoten B_4 mit imaginärem Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 imaginären conischen Knoten C_2 . Ausser der durch B_4 gehenden vierfach zu rechnenden Geraden (grün), nach welcher sich die beiden imaginären Hauptebenen daselbst schneiden, liegt noch eine die 2 imaginären Knoten verbindende vierfach zählende Gerade (roth) und, unendlich fern, die beiden eben genannten schneidend, eine unäre Gerade auf ihr. Die Fläche ist negativ gekrümmt. (13—16 cm.)

43.* (VII. 14.) Fläche mit einem conischen Knoten C_2 und einem biplanaren B_5 , welcher ein reelles Hauptebenenpaar besitzt und die Classe um 5 erniedrigt. Die 2 Hauptebenen gehen durch die zehnfach zählende grüne Gerade, die eine berührt die Fläche längs derselben und schneidet sie nach der fünffach zählenden, durch B_5 gehenden weissen, die andere berührt längs der zehnfach zu rechnenden rothen Geraden. Ausserdem liegt auf der Fläche noch die zweifache, durch C_2 gehende weisse Gerade. Abgesehen von, als Theile der parabolischen Curve, mehrfach zählenden Geraden (rothe fünffach, grüne vierfach), ist die parabolische Curve eine Curve dritter Ordnung, welche die erstgenannte Hauptebene in B_5 zur Schmiegungebene besitzt und in C_2 die durch denselben gehende weisse Gerade berührt. (13—15 cm.)

44.* (VII. 15.) Fläche mit einem reellen conischen Knoten C_2 und einem biplanaren B_6 mit reellem Hauptebenenpaar, der die Classenzahl um 6 reducirt. Beide Hauptebenen gehen durch die fünfzehnfach zählende grüne Gerade; die eine osculirt die Fläche längs derselben, die andere berührt längs der zwölfach zu rechnenden rothen. Der zwischen den beiden Knotenpunkten liegende geschlossene Flächentheil ist positiv gekrümmt, der andere negativ. (12—15 cm.)

45.* (VII. 16.) Fläche mit einem uniplanaren, die Classenzahl um 6 reducirenden Knoten U_6 , dessen Hauptebene die Fläche in 3 achtfach zählenden rothen Geraden schneidet. Sie entsteht aus Nr. 37 durch Zusammenziehen der 3 Knotenpunkte in den U_6 ; die 3 unären Geraden von Nr. 37 bleiben dabei erhalten und besitzen ebenfalls reelle Asymptotenpunkte. Im Allgemeinen besitzt eine solche Fläche zur parabolischen Curve eine solche sechster Ordnung, welche die Form eines die 3 unären Geraden

berührenden Ovals besitzt. Weil aber auf dem vorliegenden Modell diese 3 Geraden sich schneiden, verschwindet dieses Oval und die Fläche ist negativ gekrümmt. (12—15 cm.)

46.* (VII. 17.) Dasselbe, jedoch schneidet die Tangentialebene im uniplanaren U_6 die Fläche nur nach einer reellen rothen Geraden. Ausser dieser enthält die Fläche nur noch eine reelle unäre Gerade (weiss), welche reelle Asymptotenpunkte besitzt. Die parabolische Curve, im allgemeinen Fall eine aus 2 Ovalen bestehende, jeden Knotenstrahl in U_6 berührende Curve sechster Ordnung, ist hier in 2 ebene Curven dritter Ordnung ausgeartet, von denen jede in U_6 einen Rückkehrpunkt besitzt. (12—15 cm.)

47.* (VII. 18.) Fläche mit einem uniplanaren, die Classe um 7 reducirenden Knoten U_7 , dessen Tangentialebene die Fläche längs der sechzehn-fach zählenden grünen Geraden berührt und nach der zehnfachen rothen schneidet. Die Tangentialebene längs der letzteren Geraden enthält die einzige unäre Gerade der Fläche mit 2 reellen Asymptotenpunkten. Die parabolische Curve ist, von den dazu gehörigen Geraden abgesehen (grüne sechsfach, rothe doppelt), eine Curve vierter Ordnung, welche aus einem einzigen Oval besteht und in U_7 eine Spitze mit den grünen Geraden als Tangente daselbst besitzt. Durch diese Fläche findet der Uebergang von Nr. 45 zu 46 statt. (12—15 cm.)

48.* (VII. 19.) Fläche mit einem uniplanaren Knoten U_8 , durch welche die Classenzahl um 8 vermindert wird. Die Tangentialebene in U_8 osculirt die Fläche längs der einzigen sieben-undzwanzigfach zählenden Geraden. Sieht man von dieser als Theil der parabolischen Curve zehnfach zu rechnenden Geraden ab, so ist die parabolische Curve ein Kegelschnitt, der in U_8 die Gerade der Fläche berührt. (12—15 cm.)

49.* (VII. 20.) Regelfläche, deren Doppelgerade völlig von reellen Flächentheilen umgeben ist. Sie wird (wie Nr. 50 und 51) durch die Verbindungsgeraden entsprechender Elemente der grünen Geraden und des auf sie projectivisch bezogenen, auf der Fläche liegenden, weissen Kegelschnittes (Kreis) gebildet und ist, wie alle Regelflächen, von derselben Classe wie Ordnung, d. h. hier der dritten. Die grüne Gerade durchsetzt die Ebene des Kreises hier in seinem Innern. (13—15 cm.)

50.* (VII. 21.) Dasselbe, nur verläuft die Doppelgerade zum Theil isolirt; sie verlässt die reellen Flächentheile in 2 Zwickpunkten*), welche auf der Fläche durch den Durchschnitt der 2 rothen Erzeugenden mit der Doppelgeraden markirt werden. Diejenigen durch die grüne Gerade (hier ausserhalb des Kreises verlaufend) gehenden 2 Ebenen, welche den Kreis berühren, liefern die 2 rothen Erzeugenden. (13—15 cm.)

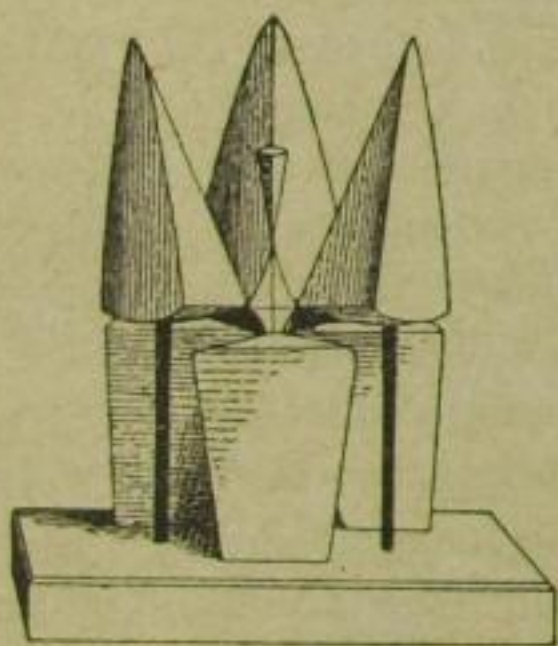
51.* (VII. 22.) Cayley'sche Regelfläche dritter Ordnung. Die beiden Zwickpunkte der vorigen Fläche haben sich im unendlich fernen Punkt der Doppelgeraden vereinigt. Sie entsteht dann, wenn die grüne (vergl. Nr. 49) Gerade den Kreis trifft; diese Gerade wird dann zugleich die Doppelgerade. (13—15 cm.)

52.* (VII. 23.) Dasselbe, Collineation der vorigen Fläche; der Kegelschnitt liegt im Unendlichen. (13—15 cm.)

53.* (VII. 26.) Drahtmodell, Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 conischen Knoten C_2 , welche einem reellen Pentaëder angehören, auf den Punktraum. Im Allgemeinen lässt sich die Gleichung einer jeden Fläche dritter Ordnung als die Summe von 5 Cuben von linearen Ausdrücken in den Coordinaten darstellen, und zwar nur auf eine Weise. Diese 5 Ebenen bilden das zu dieser Fläche gehörige Pentaëder, sie bestimmen 10 Schnittgerade (Pentaëderkanten), und 10 Schnittpunkte (Pentaëderecken); ausserdem gibt es noch 10 Ebenen, welche je durch eine Pentaëderecke und die gegenüberliegende Kante gehen (Diagonalebene). Das vorliegende Drahtmodell stellt nun schematisch das allen Flächen mit nur conischen Knoten (Nr. 30—37) gemeinsame Pentaëder dar. (Für die Diagonalfäche Nr. 30 lässt sich dasselbe sofort angeben. Die 10 Ovalpunkte dieser Fläche sind die 10 Eckpunkte des Pentaëders; die 5 Ebenen desselben sind diejenigen Ebenen, welche je 3 nicht durch einen Punkt gehende rothe Gerade enthalten; die 10 Diagonalebene sind die Tangentialebenen in den Ovalpunkten.)

*) So nennt man diejenigen Punkte einer Doppelcurve, in welchen die beiden Tangentialebenen zusammenfallen; sie trennen im Allgemeinen die isolirt verlaufenden Theile der Doppelcurve von den reellen und sind als uniplanare Punkte zu betrachten.

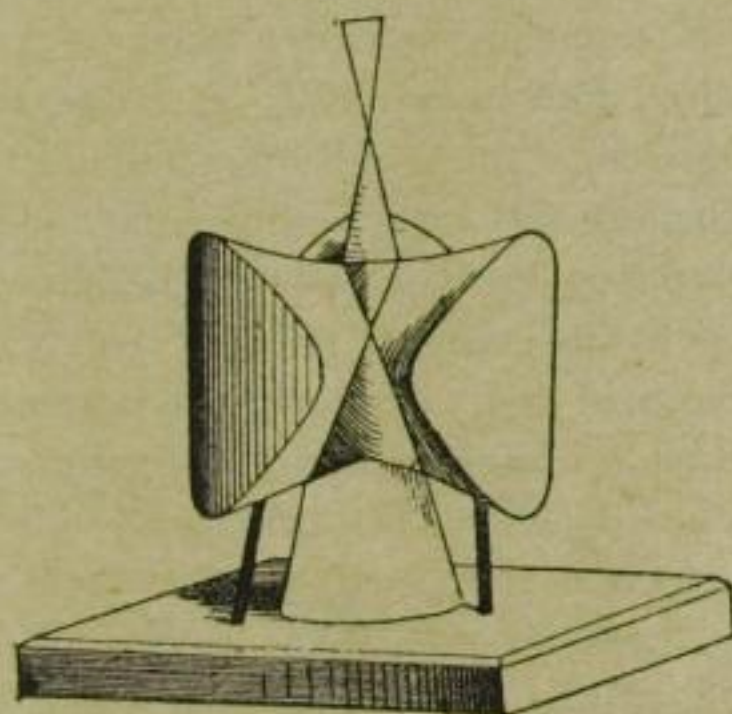
Die gelben Dräthe sind die Kanten des Pentaeders (dazu gehört noch die in der Horizontalebene gelegene, unendlich ferne Gerade), ihre Schnittpunkte (wovon 3 im Unendlichen) die Ecken desselben; die rothen Geraden Schnitte von Pentaeder- und Diagonalebene; die grünen von Diagonalebene mit einander. Die Diagonal- und Pentaederebenen theilen den Raum im ganzen in 15 Kammern, wovon 5 von 4 (Tetraederkammern), 10 von 5 Ebenen (Pentaederkammern) begrenzt werden. In jedem Pentaeder gibt es im Allgemeinen nur eine einzige Fläche, welche in einem gegebenen Punkt einen Doppelpunkt besitzt. Je nachdem nun dieser Punkt in verschiedenen Kammern gewählt wird, gibt es verschiedene Arten von Flächen dritter Ordnung, die durch die römischen Zahlen im Modell gekennzeichnet sind. Ausser der beiliegenden Erklärung, von Rodenberg verfasst, vergleiche dessen Abhandlung in den Mathem. Annalen Bd. 14, pag. 46 ff.; bezüglich des Pentaeders ferner die Abhandlung von Clebsch im Crelle'schen Journal Bd. 59, pag. 194 ff.; ferner Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Theil, Art. 269, 282. 2. Aufl. (14—22 cm.)



54.* (VII. 24 a.) Hesse'sche Fläche zu Nr. 31 und 32. Sie ist eine Fläche vierter Ordnung mit 14 reellen Doppelpunkten, von denen im vorliegenden Fall 3 im Unendlichen liegen. In den 4 Knotenpunkten der Fläche dritter Ordnung (Nr. 31), welche zugleich der Hesse'schen Fläche angehören, kommen noch diejenigen 10 Knoten hinzu, welche in den 10 Eckpunkten des ihr zugehörigen Pentaeders liegen; 6 davon sind die Schnittpunkte je einer rothen und weissen Geraden (3 davon liegen im Unendlichen). Auf der Hesse'schen Fläche liegen ferner 16 Geraden, längs welchen dieselbe Tangentialebene berührt, 10 davon sind die Kanten des der zugehörigen Fläche dritter Ordnung angehörenden Pentaeders,

die 6 andern sind zugleich die 6 Knotenstrahlen der Fläche dritter Ordnung. (Wird die obige Fläche als Hesse'sche Fläche von Nr. 31 angesehen, so sind die rothen Geraden auf ihr die Knotenstrahlen, die grünen Pentaederkanten, für Nr. 32 verhält es sich umgekehrt). (21-25 cm.)

55.* (VII. 24 b.) Der durch die Knotenpunkte begrenzte endliche Theil der vorhergehenden Fläche vergrössert und regelmässig angenommen. Derselbe würde ein Theil der Hesse'schen Fläche einer solchen Fläche dritter Ordnung sein, für welche das Tetraeder der Knotenpunkte ein reguläres ist und bei der die Ebene der 3 unären (weissen) Geraden im Unendlichen liegt. (13-16 cm.)



56.* (VII. 25.) Hesse'sche Fläche zu Nr. 36, aus Zweckmässigkeitsgründen in etwas andern Dimensionen modellirt. Sie besitzt 13 reelle Knoten, davon 3 im Unendlichen; ferner 13 Gerade, 10 davon sind die Kanten des Pentaeders (eine ist unendlich fern), 3 die Knotenstrahlen der ihr zugehörigen Fläche dritter Ordnung. (21-25 cm.) Ganze Serie *M.* 300., I. Gr. *M.* 140., II. Gr. *M.* 160.

Ein weiteres, dieser Rubrik zuzurechnendes Modell findet sich unter »III. Modelle zur Funktionentheorie«, Nr. 176, XIV. Serie, Nr. iv.

B. Cycliden.

Unter Cycliden im allgemeinen Sinn (nach Darboux) versteht man alle diejenigen Flächen vierter Ordnung, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis zur Doppelcurve haben. Sie sind die Enveloppen aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Fläche zweiten Grades liegen und eine gegebene Kugel stets orthogonal schneiden. Sie besitzen zwei Schaaren von Kreisen, den beiden Schaaren von Erzeugenden der Flächen zweiter Ordnung entsprechend, doch

sind dieselben nicht nothwendig zugleich Krümmungslinien; die Krümmungslinien sind im Allgemeinen vielmehr höhere algebraische Curven. Diese Flächen können bis zu 4 Knotenpunkte enthalten. Die Flächen mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten erhält man auch durch Transformation mittelst reciproker Radien beziehungsweise aus folgenden Flächen zweiter Ordnung: a) allgemeine Fläche zweiter Ordnung, b) beliebiger Kegel, c) Rotationsfläche, d) Kreiskegel. Da die Krümmungslinien dabei erhalten bleiben, und Gerade und Kreise im Allgemeinen in Kreise, Ebenen und Kugeln in Kugeln übergeführt werden, so besteht im Falle b) und c) das eine System von Krümmungslinien aus Kreisen, die sich in 2 Doppelpunkten der Fläche schneiden, das andre wird durch Kugeln ausgeschnitten (ist sphärisch). Im Falle d) sind die beiden Kreisschaaren, welche aus den Erzeugenden resp. Parallelkreisen des Rotationskegels sich ergeben, von denen die ersteren sich in den 2 reellen, die anderen in den 2 imaginären Knotenpunkten schneiden, zugleich Krümmungslinien. Man nennt diese letzteren Dupin'sche Cycliden. Dieselben ergeben sich auch als Enveloppen aller Kugeln, welche 3 gegebene berühren. Vergl. die Abhandlung von Maxwell in Quart. Journ. of Math. Bd. 9, pag. 111, sowie Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Theil, Art. 313—323 (2. Aufl.).

57—63. Dupin'sche Cycliden. Sie wurden mit Ausnahme von Nr. 58, 59 u. 63 von Assistent Dr. P. Vogel modellirt.

57. (V. xvi a.) Ringcyclide mit 4 imaginären Knotenpunkten (davon ist die gewöhnliche Wulstfläche ein specieller Fall). Die aufgezeichneten 2 Kreisschaaren sind die Krümmungslinien. (17—6 cm.) M. 9. —.

58. 59. (IX. 7 u. 8.) Dasselbe in zwei verschiedenen Verhältnissen. Auf beiden sind ausser den Krümmungslinien noch Schnittcurven mehrerer doppelt berührender Ebenen aufgezeichnet. Diese beiden Modelle sind Abgüsse der im Besitze des mathematischen Seminars in Berlin befindlichen, von Herrn Kummer angefertigten Originale. (12—5 u. 9—6 cm.) M. 12. —.

60. (V. xvi b.) Horncyclide. Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 auseinanderliegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (19—6 cm.) M. 11. 50.



61. (V. xvi c.) Spindelcyclide. Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 ineinander liegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (12—9 cm.) M. 6. 50.

62. (V. xvi d.) Parabolische Horncyclide. Sie besitzt 2 reelle Knotenpunkte, welche durch eine auf der Fläche liegende Gerade verbunden sind; die 2 imaginären Knotenpunkte liegen ebenfalls auf einer zur ersten senkrechten Geraden; die Fläche ist blos dritter Ordnung (die reelle unendlich ferne Ebene sondert sich ab). (15—11 cm.) M. 11. 50.

63. (X., I. N., 5.) Parabolische Ringcyclide. Bei ihr sind alle 4 Knotenpunkte imaginär, die Verbindungsgeraden beider Paare, welche ganz auf der Fläche liegen, dagegen reell. Ausser diesen befinden sich noch 2 sich schneidende Gerade und eine unendlich ferne auf der Fläche, die von der dritten Ordnung ist. Die aufgezeichneten Curven (Kreise) sind Krümmungslinien. Die Fläche enthält, wie Nr. 62, den unendlich fernen imaginären Kugelkreis nur mehr einfach, es sondert sich die unendlich ferne Ebene als ein Bestandtheil ab. Von stud. math. Finsterwalder. Erklärung beigegeben. (18—12 cm.) M. 10. —.

Die 3 folgenden Flächen (Nr. 64, 65, 66, X., II. N., xxviii.) sind Cycliden im weiteren Sinn mit 3, beziehungsweise 2 Knotenpunkten und wurden von stud. math. Finsterwalder gefertigt. Erläuterung beigegeben.

Preis zusammen M. 12. —.

64. Fläche mit 2 conjugirt imaginären Doppelpunkten. (10—7 cm.)

65. Fläche mit 2 conjugirt imaginären Doppelpunkten und einem reellen. (10—5 cm.)

66. Fläche mit einem uniplanaren Knoten, der durch Zusammenziehung der 3 Knoten entsteht.

Die beiden letzteren Flächen sind Orthogonalflächen desjenigen Strahlensystems, welches durch Reflexion eines Strahlenbüschels an einem unendlich dünnen Kreisringe entsteht. Im Falle

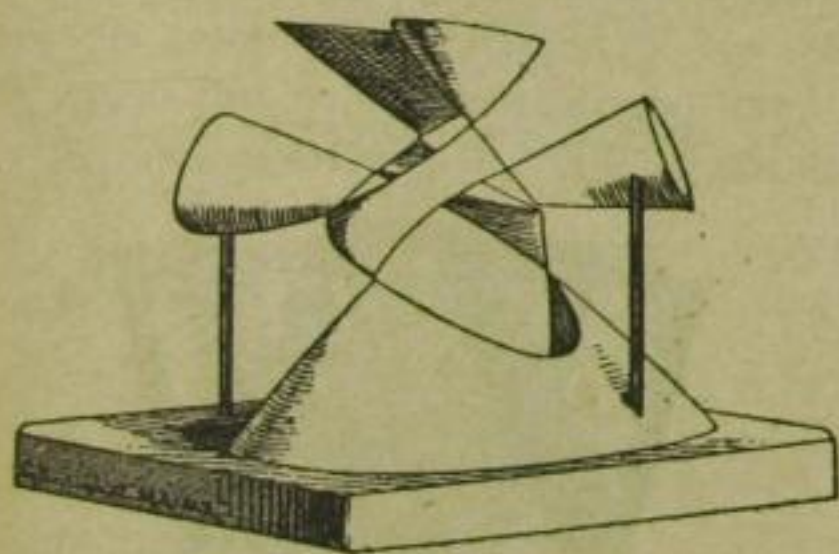
65. liegt der leuchtende Punkt ausserhalb des Kreises in der Ebene desselben, im Falle 66. auf dem Kreise selbst.

Die 3 Flächen sind Repräsentanten von Flächen vierter Ordnung, für die ein Mantel der Centrafläche sich auf einen Kreis reducirt.

C. Kummer'sche Flächen.

Die Kummer'sche Fläche (Singularitätenfläche eines Complexes zweiten Grades) ist von der vierten Ordnung und von der vierten Classe und besitzt 16 Knotenpunkte und ebensoviele Doppeltangentialebenen, welche je 6 Knotenpunkte enthalten. Vergl. Kummer, Abhandlungen der Berliner Akademie von 1866 pag. 62 ff.; Plücker's Werk: Neue Geometrie des Raumes etc., Leipzig 1868; Salmon: Geometrie des Raumes II. pag. 411—414, sowie Kapitel XII.

67. (II. vi a.) Alle 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell (22—19 cm.) *M.* 24.



68. (II. vi b.) 8 der Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell. (30—20 cm.) *M.* 28.

69. (II. vi c.) 4 der 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell. (20—16 cm.) *M.* 18.

Alle 3 Modelle wurden von stud. math. *Rohn* modellirt; Erläuterungen hierzu beigegeben. Zu den Kummer'schen Flächen ist ferner noch die unter Nr. VI. aufgeführte Wellenfläche zu rechnen (Nr. 159 u. 161).

D. Serie von Flächen 4. Ordnung mit 4 längs Kreisen berührenden Ebenen.

70—75. (IX. 1—6.) Diese Modelle sind Copien nach den im Besitze des mathematischen Seminars der k. Universität zu Berlin befindlichen

Originalen, von Herrn *Kummer* besprochen in den Monatsberichten der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin von 1862, 1866, 1872. (Abdrücke beigelegt.)

Die Gleichung aller dieser Flächen lässt sich in die Form bringen: $\varphi^2 - \lambda p q r s = 0$, wo φ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung; p, q, r, s die von 4 Ebenen bedeuten; es sind dies diejenigen 4 Tangentialebenen, welche die Flächen längs einer Curve berühren. Die 4 Ebenen bilden in den Modellen ein reguläres Tetraeder:

$$p = x + y + z - a$$

$$q = -x + y - z - a$$

$$r = -x - y + z - a$$

$$s = x - y - z - a$$

und die 12 Schnittpunkte der 6 Kanten desselben mit der Fläche zweiter Ordnung, einer Kugel, deren Mittelpunkt mit dem des Tetraeders zusammenfällt und deren Gleichung daher ist:

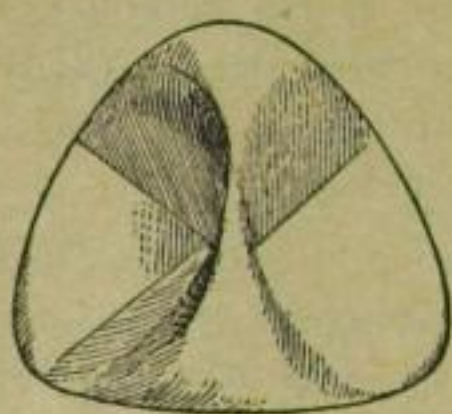
$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

sind Knotenpunkte der dargestellten Fläche vierter Ordnung. Je nach der Annahme des Radius der Kugel r und des Parameters λ (das Tetraeder als gegeben betrachtet) erhält man verschiedene Typen, von denen die charakteristischen modellirt sind.

70. (IX. 1.) Die Fläche besteht aus 4 congruenten Theilen, die in 6 biplanaren Knotenpunkten zusammenhängen. Die 2 Tangentialebenen in jedem solchen Punkt sind reell und berühren die Fläche in Kreisen. Sie entsteht, indem die Kugel die Kanten des Tetraeders berührt, d. h. indem $a = r$, $\lambda < 0$. Die aufgezzeichneten Curven sind die Kegelschnittpaare, nach welchen die Fläche von jeder Tetraederfläche geschnitten wird. Die biplanaren Knoten besitzen hier die Eigenthümlichkeit, dass in denselben jede durch den Schnitt der beiden Tangentialebenen gehende Ebene die Fläche nach einer Curve mit Berührungspunkt statt mit Spitze schneidet. (11—11 cm.) *M.* 17. —.

71. (IX. 2.) Wie oben. In den biplanaren Knotenpunkten sind jedoch die Tangentialebenen imaginär; man erhält sie, wenn man $a = r$ setzt und $\lambda > 0$ wählt. (10—10 cm.) *M.* 19. —.

72. (IX. 3.) Römische Fläche von Steiner. Man erhält sie, indem man $a = r$, $\lambda = 1$ setzt.

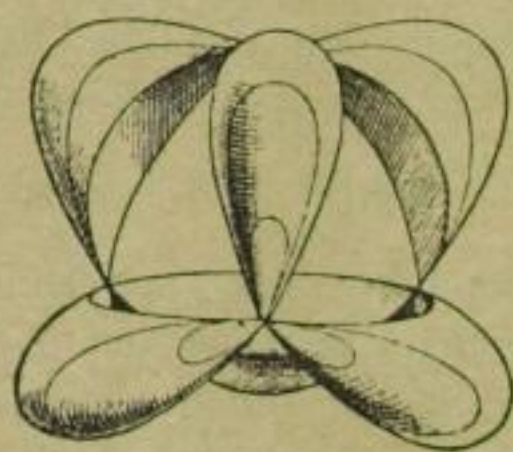


Sie besitzt 3 sich schneidende Doppelgerade und ist von der dritten Classe. (10—10 cm.) *M.* 8. —.

73. (IX. 4.) Fläche aus 10 (6 und 4 je unter sich congruenten) Theilen bestehend, welche in 12 conischen Knotenpunkten zusammenhängen;

$$\begin{aligned} r &> a \\ &< a\sqrt{2}, \\ \lambda &> 0. \end{aligned}$$

(11—11 cm.) *M.* 23. —.



74. (IX. 5.) Fläche, bestehend aus 6 congruenten Theilen, welche in 4 uniplanaren Knoten zusammenhängen. Die Kugel geht durch die Ecken des Tetraeders, die 3 Knoten der dreizipfligen Theile der vorigen Fläche vereinigen sich zu einem uniplanaren. Man erhält sie für: $r = a\sqrt{2}$, $\lambda > 0$. (10—10 cm.) . . . *M.* 21. —.

75. (IX. 6.) Fläche, bestehend aus 4 congruenten Theilen, die in 4 uniplanaren Knoten zusammenhängen. Man erhält sie für $r = a\sqrt{2}$, $\lambda < 0$. (12—12 cm.) . . . *M.* 23. —.

Diesen Modellen ist als Erläuterung ein Abdruck der in den Berliner Akademieberichte vom Jahre 1863, 1866, 1872 erschienenen Abhandlungen von Prof. Kummer über diesen Gegenstand beigegeben.

E. Serie von Regelflächen vierter Ordnung

nach Construction von Prof. Dr. K. Rohn.

Vergleiche Rohn's Aufsatz: Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung, Math.

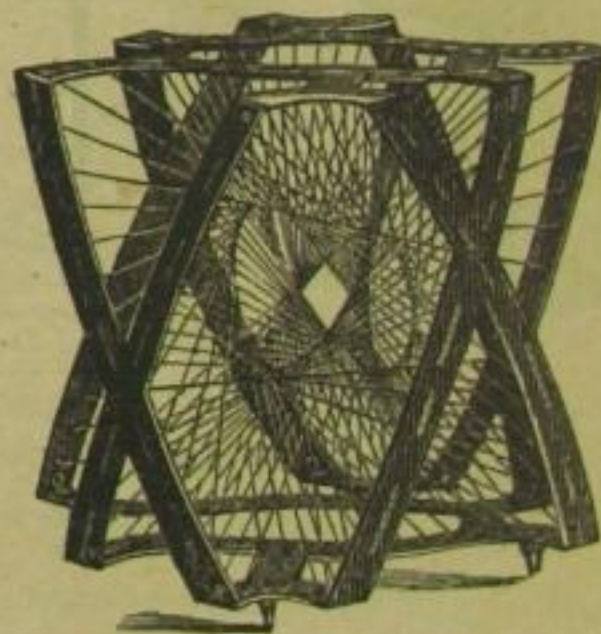
Annal. Bd. XXVIII; der Serie ist diese Abhandlung beigegeben und ist daselbst auf die Modelle verwiesen.

Diese Regelflächen zerfallen nach der Art ihrer Doppelcurve in 4 verschiedene Classen; nämlich:

- 1) solche mit 2 Doppelgeraden,
- 2) solche mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt,
- 3) solche mit Doppelcurve dritter Ordnung,
- 4) solche mit dreifacher Geraden.

Jede dieser Classen zerfällt weiter in Unterclassen, je nach der Anzahl ihrer reellen Pinchpoints, welche sich auf der Doppelcurve vorfinden. Die verschiedene Art der Doppelcurve einerseits und die Realität der Pinchpoints andererseits bedingen die Verschiedenheit der Flächengestalten und damit zugleich ihre Projectionen, die sich als Curven vierter Classe mit zwei resp. drei Doppeltangenten, oder einer dreifachen Tangente erweisen. Die einzelnen Flächen sind möglichst symmetrisch construiert, ohne ihre Gestalt zu specialisiren.

163. (XIII. 1.) Regelfläche mit 2 Doppelgeraden und 8 reellen Pinchpoints; sie besteht aus zwei congruenten Theilen, auf denen je ein Stück von jeder Doppelgeraden verläuft. *M.* 36. —.



164. (XIII. 2.) Regelfläche mit 2 Doppelgeraden ohne reelle Pinchpoints; sie besteht aus zwei congruenten Mänteln, die sich längs der beiden Doppelgeraden gegenseitig durchsetzen.

M. 44. —.

165. (XIII. 3.) Regelfläche mit 2 Doppelgeraden, auf der einen liegen 4 reelle, auf der andern 4 imaginäre Pinchpoints. Sie besitzt zwei congruente Mäntel, die sich längs der einen Doppelgeraden durchschneiden, indess jeder Mantel ein Stück der anderen Doppelgeraden enthält *M.* 40. —.

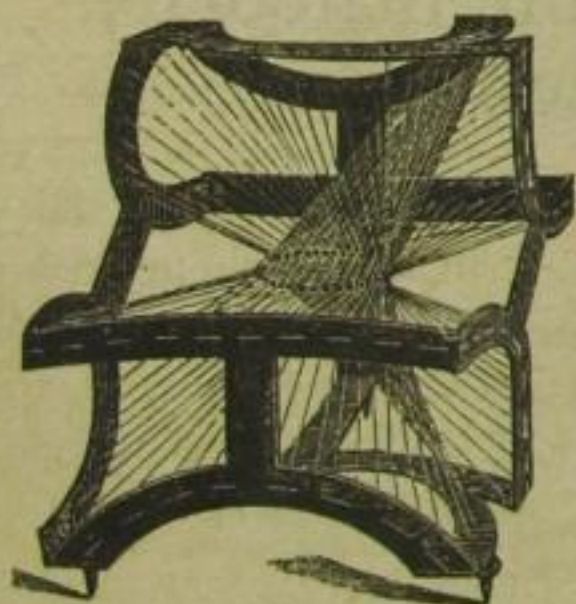
166. (XIII. 4.) Regelfläche mit 2 imaginären Doppelgeraden; sie besitzt zwei congruente

Mäntel, die Hyperboloiden ganz ähnlich sehen. Die Projection eines solchen Mantels besteht aus zwei hyperbelartigen Aesten, deren einer zwei Spitzen mit Doppelpunkt aufweist. *M.* 36. —.

167. (XIII. 5.) Regelfläche mit Selbstberührungsgeraden und 4 reellen Pinchpoints; sie besteht aus zwei congruenten Theilen und erscheint als interessanter Specialfall der Fläche 163. *M.* 36. —.

168. (XIII. 6.) Regelfläche mit dreifacher Geraden und 4 reellen Pinchpoints; alle Erzeugende treffen eine Leitgerade. Diese Fläche besitzt nur einen Mantel, der an 4 Stellen eine Faltung zeigt. *M.* 40. —.

169. (XIII. 7.) Regelfläche mit dreifacher Geraden, deren Punkte zwei constante und eine bewegliche Tangentialebene aufweisen. Während die Erzeugende die Regelfläche beschreibt, passiert sie zwei Mal die Lage der dreifachen Geraden, auf der zwei höhere singuläre Punkte entstehen. *M.* 40. —.



170. (XIII. 8.) Regelfläche mit Doppelkreis und Doppelgeraden, die sich rechtwinklig schneiden; auf jeder Doppelcurve liegen zwei reelle Pinchpoints. Die Fläche ist mehrfach symmetrisch; der Selbstberührungspunkt (Schnittpunkt von Kreis und Gerade) liegt reell auf der Fläche. *M.* 44. —.

171. (XIII. 9.) Regelfläche mit Doppelcurve dritter Ordnung und 4 reellen Pinchpoints. Die Fläche besteht aus einem Mantel, auf dem zwei Stücke der Doppelcurve liegen; die Erzeugenden sind theils reelle, theils ideelle Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung, darunter vier Tangenten. *M.* 40. —.

172. (XIII. 10.) Regelfläche mit Doppelcurve dritter Ordnung ohne reelle Pinchpoints. Auch diese Fläche besitzt nur einen Mantel, der sich jedoch längs der ganzen Doppelcurve selbst durchsetzt. Gleichwohl sind die Erzeugenden

wieder zum Theil reelle, zum Theil ideelle Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung, unter denen sich wieder vier Tangenten befinden. *M.* 40. —.

F. Diverse algebraische Flächen vierter und höherer Ordnung.

76. (IX. 9.) Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden. Auf derselben liegen 2 Zwickpunkte und ein 3 facher Punkt, Durchstosspunkt der Doppelgeraden mit der Fläche. Alle durch diese Gerade gelegten Ebenen schneiden die Fläche nach Kreisen. Die Fläche ist der geometrische Ort der Krümmungskreise sämtlicher Normalschnitte in einem gewöhnlichen Punkte (positiver Krümmung) einer beliebigen Fläche, (Vergl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes. II. Theil, 2. Aufl. Cap. VI. §. 308. (9—3 cm.) *M.* 6. —.

Abguss nach einem von Herrn Kummer angefertigten und in dem Besitze des mathematischen Seminars der Berliner Universität befindlichen Modell.



77. (X., I. N., 4.) Fläche vierter Ordnung mit 2 sich schneidenden Doppelgeraden (böhmisches Gewölbe). Sie besitzt auf jeder der Doppelgeraden 2 Zwickpunkte, einen einfachen Selbstberührungspunkt, 4 nach Kreisen berührende Tangentialebenen und entsteht dadurch, dass man den Mittelpunkt eines Kreises auf einem andern von gleichem Radius fortrücken lässt, wobei die Ebene des beweglichen Kreises stets zu sich parallel und senkrecht zur Ebene des festen vom Mittelpunkt des beweglichen durchlaufenen bleibt. Von stud. math. Finsterwalder. (6—10 cm.) *M.* 3. 50.

78. (X., II. N., xxix.) Fläche achter Ordnung. Sie besitzt 2 zu einander senkrechte, sich schneidende Selbstberührungsgerade, von denen jede in 2 uniplanaren Punkten höherer Ordnung (durch Zusammenziehen von 2 Zwickpunkten entstanden) aus ihr heraustritt, 2 congruente ebene Doppelcurven vierter Ordnung, die im Mittelpunkt (hohe Singularität) einen Selbstberührungspunkt besitzen und aus der Fläche in zusammen 8 Zwickpunkten heraustreten, endlich 2 Doppeltangentialebenen, welche die Fläche

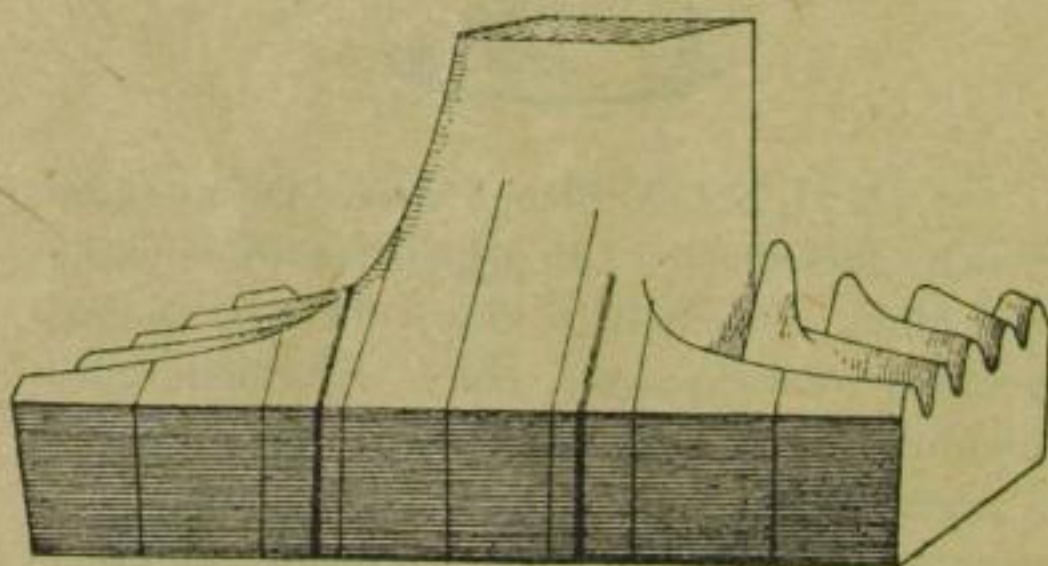
längs zweier Kreise berühren. Sie entsteht durch die Bewegung eines Kreises von unveränderlichem Radius dadurch, dass die Endpunkte eines Durchmessers desselben stets auf 2 zu einander senkrechten Geraden gleiten (die beiden Selbstberührungsgeraden), während die Ebene des beweglichen Kreises stets auf derjenigen der beiden Geraden senkrecht steht. Die genannte Fläche enthält den unendlich fernen imaginären Kugelkreis als Doppelcurve. Von stud. math. *Finsterwalder*. (7—5 cm.) *M.* 4. —.

79. (VIII. xxii.) Fläche zwölfter Ordnung. Ihre Horizontalschnitte sind solche Brennnlinien, wie sie durch Reflexion eines von einem Punkt ausgehenden Strahlenbüschels an einem Kreise entstehen. Dieselben sind so auf einander geschichtet, dass die reflectirenden Kreise einen Kreiscylinder bilden, während die leuchtenden Punkte eine um 45° gegen die Horizontalebene

geneigte Gerade ausfüllen. Die Fläche kann angesehen werden als ein Theil der Brennfläche der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Die Fläche besitzt als Rückkehrkanten 2 sich in einem Punkte berührende gleichseitige Hyperbeln und eine weitere Raumcurve, die sich selbst und die Hyperbeln in dem genannten Punkt berührt. Von stud. math. *Finsterwalder*, hierzu eine Erläuterung. (20—15 cm.) *M.* 15. —.

Dahin gehören ferner die unter V. C. aufgeführten algebraischen Flächen, und zwar die Minimalfläche neunter Ordnung (Nr. 147), einige der Rotationsflächen mit Asymptotencurven (Nr. 113—117, 119—122), die Krümmungsentralflächen des Paraboloides Nr. 157, des Hyperboloides Nr. 160 und die unter Nr. 173—175 verzeichneten Modelle zur Functionentheorie.

III. Modelle zur Functionentheorie, transcendente Flächen.



80. (V. xii.) Darstellung der elliptischen Function $\varphi = am(u, k)$ durch eine Fläche. φ wurde vertikal, k und u horizontal aufgetragen (Massstab für k -Achse wurde $\frac{3}{2}$ mal so gross als der für die 2 andern Grössen genommen). Für $k^2 < 1$ genügen zur Construction des Modelles die Legendre'schen Tabellen, und in diesem Intervall erstreckt sich die Fläche auch in vertikaler Richtung in's Unendliche. Zur Construction des Modells für die Werthe $k^2 > 1$ muss man das elliptische Integral:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

auf ein anderes solches Integral mit einem Modul $\lambda^2 < 1$ transformiren, am besten $\lambda^2 = \frac{1}{k^2}$. Es

ergibt sich dann, dass im Intervall $k^2 > 1$ das Modell in vertikaler Richtung sich nicht in's Unendliche erstreckt, sondern eine endliche Höhe besitzt, die um so kleiner wird, je grösser k^2 ist. Modellirt und mit einer Erläuterung versehen von stud. math. *Th. Kuen* und *Chr. Wolff*. (35—19 cm.) *M.* 18. —.

197—199. (XVI. ii., 1—3.) Modelle Riemann'scher Flächen.

197. (XVI. ii., 1.) Einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche mit 1 Windungspunkt 1. Ordn. (zweiblättrig) *M.* 2. —.

198. (XVI. ii., 2.) Desgl. mit 1 Windungspunkt 2. Ordn. (dreiblättrig) *M.* 2. —.

199. (XVI. ii., 3.) Dreifach zusammenhängende Fläche mit einer in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie *M.* 2. —.
zus. *M.* 5. —.

173—182. (XIV. 1—x.) 16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. *Walther Dyck*.

Um den Verlauf einer Function einer complexen Veränderlichen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen und ebenso den Gesamtverlauf gewisser Typen von Functionen einer com-

plexen Veränderlichen durch eine räumliche Darstellung zu veranschaulichen, sind, in der bekannten Weise, sowohl der reelle als auch der imaginäre Theil der Functionswerte über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So wird jede Function eines complexen Argumentes durch zwei, mit R und I bezeichnete Flächen versinnlicht, deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufes liefert. Zur genaueren Charakteristik der Werthsysteme sind auf den Flächen Niveaulinien in gleichen Abständen (die Einheit des Massstabes = 3 cm) aufgetragen und die zugehörigen Orthogonaltrajectorien. Dabei stehen die jedesmal zusammengehörigen Modelle R und I in der Beziehung zu einander, dass die Projection der Niveaulinien und Falllinien der einen Fläche in die Ebene des complexen Arguments mit der Projection der Falllinien bzw. Niveaulinien für die andere Fläche in eben diese Ebene identisch ist.

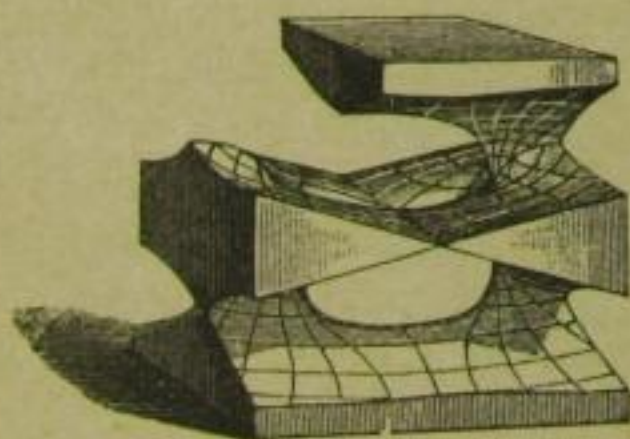
Die Serie enthält folgende Darstellungen:

1) Die Modelle 1., II. und III. veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen und zwar:

173. (XIV. 1.) Für die Function $w^2 = z^2 - 1$. Die beiden über der z -Ebene entstehenden Flächen R und I sind Flächen vierter Ordnung, die sich zweiblättrig über dieser Ebene ausbreiten. Die $z = +1$ und $z = -1$ entsprechenden Punkte sind die Verzweigungspunkte. Von Lehramts-Candidat *A. Wildbrett*. (12—12—12 cm.)

1a. u. 1b. je *M.* 10. —.

174. (XIV. II.) Für die Function $w^2 = z^4 - 1$. Die zugehörigen, zweiblättrig über der z -Ebene ausgebreiteten Flächen sind von der achten Ordnung und bei $z = +1$, $z = -1$, $z = +i$, $z = -i$ verzweigt. Von Lehramts-Candidat *Wildbrett*. (12-12-12 cm.) 11a. u. 11b. je *M.* 14. —.



175. (XIV. III.) Für die Function $w^4 = 1 - z^4$. Hier sind die beiden Flächen R und I iden-

tisch. Man hat in unserer Darstellung eine vierblättrig über der z -Ebene sich ausbreitende Fläche (von der 16. Ordnung), für welche jedesmal zwei übereinanderliegende Punkte als reeller bzw. imaginärer Theil der Function w einander zugeordnet sind. Die Punkte $z = \pm 1$ sind Verzweigungspunkte, in denen alle vier Blätter der Fläche zusammenhängen, bei $z = \infty$ sind die Blätter paarweise verzweigt. Von Lehramts-Candidat *Wildbrett*. (12—12—12 cm.) *M.* 16. —.

2) Die Modelle IV. und V. sollen das Zusammenrücken zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte zu einem einfachen algebraischen zur Anschauung bringen.

176. (XIV. IV.) $w = \frac{1}{z}$. Von Lehramts-Candidat *Wildbrett*. (12—12—12 cm.) *M.* 11. —.

177. (XIV. V.) $w = \frac{1}{2\epsilon} \log \frac{z + \epsilon}{z - \epsilon}$. Von Assistent *Burkhardt* und stud. math. *Kleiber*. (12—12—12 cm.) . va. u. vb. je *M.* 11. —.

Die Periode des Logarithmus $= i \frac{\pi}{\epsilon}$ kommt selbstverständlich nur auf der dem imaginären Theile von w entsprechenden Fläche zur Geltung. Sie ist im Modell $= 4i$ angenommen. Für Linie $\epsilon = 0$ findet der Uebergang der Flächen V. in IV. statt, wobei die bei V. in $z = \pm \epsilon$ gelegenen »Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung« zusammenrücken, während gleichzeitig die Periode $i \frac{\pi}{\epsilon}$ unendlich gross wird.

3) Das Modell

178. (XIV. VI.) $6w = e^{\frac{1}{6}z}$ versinnlicht den einfachsten wesentlich singulären Punkt, und zwar ist der reelle Theil der Function durch:

$$u = \frac{1}{6} e^{x'} \cos y'$$

$$\left(\text{wo } x' = \frac{x}{6(x^2 + y^2)} \quad y' = \frac{-y}{6(x^2 + y^2)} \right)$$

$z = x + iy$ gesetzt ist)

dargestellt, während der imaginäre Theil:

$$v = \frac{1}{6} e^{x'} \sin y'$$

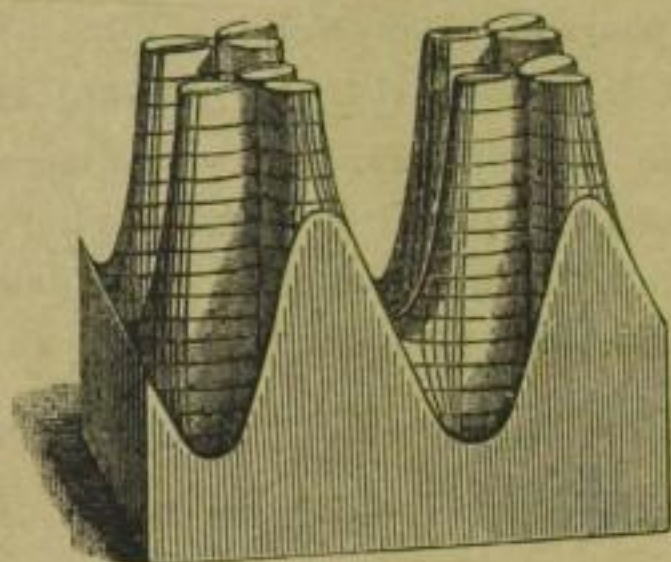
durch eine Transformation der (x, y) Ebene durch reciproke Radien aus ersterem herzuleiten ist. Von stud. math. *Kleiber*. (17-18-15 cm.) *M.* 18. —.

4) 179—182. (XIV. VII.—X.) Die Modelle VII.—X. dienen zur Veranschaulichung des Verlaufes der elliptischen Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ in der Weierstrass'schen Normalform. Es wurden dabei die beiden besonderen Fälle für

die Darstellung gewählt, für welche in der cubischen Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

einmal $g_3 = 0$, dann $g_2 = 0$ ist; sie sind zugleich Repräsentanten der beiden Functionsklassen, für welche die Discriminante G der obigen Gleichung positiv, bezw. negativ ist.



179 u. 180. (XIV. VII. u. VIII.) Hier ist $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ gewählt. Dann ergeben sich für die Perioden w_1 und w_3 der elliptischen Functionen die Werthe

$$w_1 = 1,311, \quad w_3 = 1,311 \cdot i = w_1 \cdot i.$$

Die Symmetrie der Flächen innerhalb des Periodenquadrates (es sind jedesmal vier solcher modellirt) ist ausser durch die Relationen

$$p(-u) = p(u), \quad p'(-u) = -p'(u)$$

durch die hier speciell geltenden Beziehungen

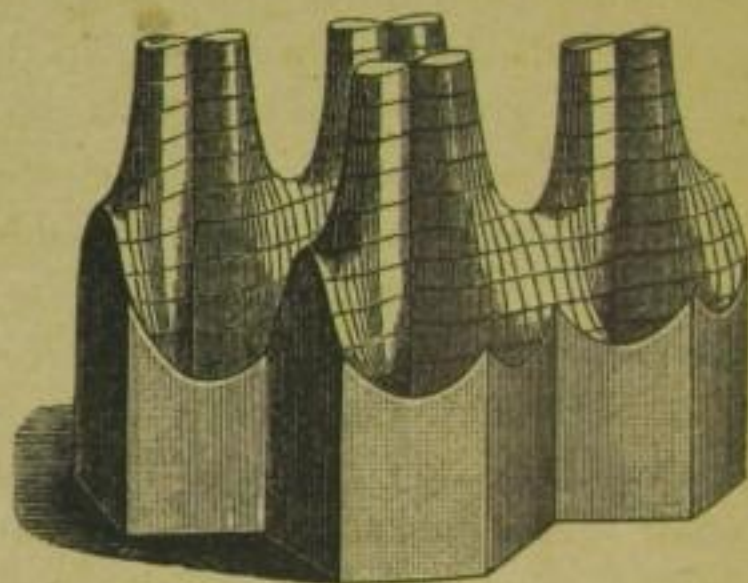
$$p(iu) = -p(u)$$

und

$$p'(iu) = i p'(u)$$

bezeichnet. Die letztere Formel zeigt zugleich, dass für $p'(u)$ in diesem Falle das den imaginären Theil darstellende Modell der Form nach identisch ist mit dem für den reellen Theil, und nur seiner Lage nach durch einen Winkel von 90° gedreht erscheint. Die Modelle kennzeichnen ebenso wie die folgenden Nr. IX und X in charakteristischer Weise das Verhalten einer Function in der Umgebung eines zweifachen [für $p(u)$] bezw. dreifachen [für $p'(u)$] Unendlichkeitspunktes. Neben diesen treten in den Modellen für $p(u)$ noch gewisse »Sattelpunkte« — den Werthen, für welche $p'(u) = 0$ wird, entsprechend — besonders hervor; und ebenso sind in den Modellen für $p'(u)$ in den Punkten, für welche $p''(u) = 0$ wird, Sattelpunkte vorhanden. Von Assistent *Burkhardt* und Lehramts-Candidat *Wildbrett*. (16—16—16 cm.)

VII a. u. VII b. je *M.* 32. —, VIII. *M.* 36. —.



181 u. 182. (XIV. IX. u. X.) Hier sind die Constanten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ zu Grunde gelegt, für welche die Perioden w_2 und w_3 die Werthe $w_2 = 1,2143$, $w_3 = 0,6072 + 1,0516 i = e^{i\frac{\pi}{3}} w_2$ erhalten. Weiter hat man für die Bezeichnung der in den Flächen ersichtlichen Symmetrien die Relationen:

$$p(\varepsilon u) = \varepsilon^4 p(u)$$

$$p'(\varepsilon u) = \varepsilon^3 p'(u)$$

wo ε eine sechste Einheitswurzel bezeichnet. Von Assistent *Burkhardt* und Lehramts-Candidat *Wildbrett*. (15—22—16 cm.)

IX a. u. IX b. je *M.* 35. —. X a. u. X b. je *M.* 38. —.

Den Modellen ist ein erläuternder Text beigefügt und 5 Figurentafeln, in welchen die auf den Flächen verzeichneten Niveaulinien und Falllinien in ihrer Projection auf die Ebene des complexen Argumentes dargestellt sind.

187. (XV. II.) (Bestimmung der) Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird. Von Dr. *K. Reinbeck* in Einbeck.

Das Modell stellt diejenige Fläche dar, auf welche das Ellipsoid vermöge der punkweisen Zuordnung durch parallele Normalen in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet wird. Das Modell bringt zur Anschauung, dass die Fläche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden kann. Mit Hülfe des Modells lässt sich ferner auch eine Vorstellung gewinnen von der Gestalt derjenigen Flächen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden. . . . *M.* 12. —.

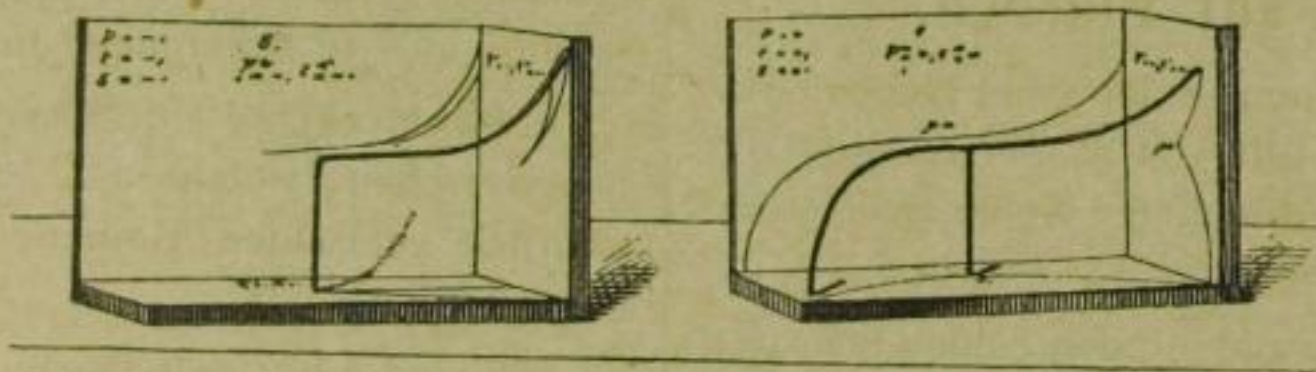
81. (VIII. XXIV.) Röhrenschraubenfläche. Sie ist die Enveloppe aller Kugeln von constantem Radius, deren Centra auf einer Schraubenlinie

liegen. Das eine System der Krümmungslinien besteht aus den zur mittleren Schraubenlinien senkrechten Kreisen, das andere aus transcendenten Curven (weiss), die jedoch nicht Schraubenlinien wie die blau gezeichneten sind. Das Problem führt auf Kreisfunctionen, die Asymptotencurven führen dagegen auf elliptische Func-

tionen. Von Assistent *Th. Kuen*, dazu eine Erläuterung. (20—30 cm.) . . . *M.* 13. —.

Andere dieser Rubrik angehörige Flächen finden sich unter V. A. Nr. 118, 123, 124, die sämtlichen Flächen unter V. B., von Ellipsoiden und Kugeln abgesehen, und unter V. C. Nr. 140—145.

IV. Raumcurven.



Beschreibt ein Punkt (P) eine unebene Raumcurve, so bewegt sich im Allgemeinen zugleich seine Tangente und die Schmiegungeebene. Dabei kann es sich ereignen, dass von den 3 Elementen eines oder 2 oder alle 3 stationär werden. Den 8 verschiedenen Fällen, die hierbei eintreten können, entsprechen 8 Typen eines Elementes einer Raumcurve mit im Allgemeinen singulärem Verhalten. Vergl. Ausführung zur 10. Serie im I. Theil dieses Cataloges.

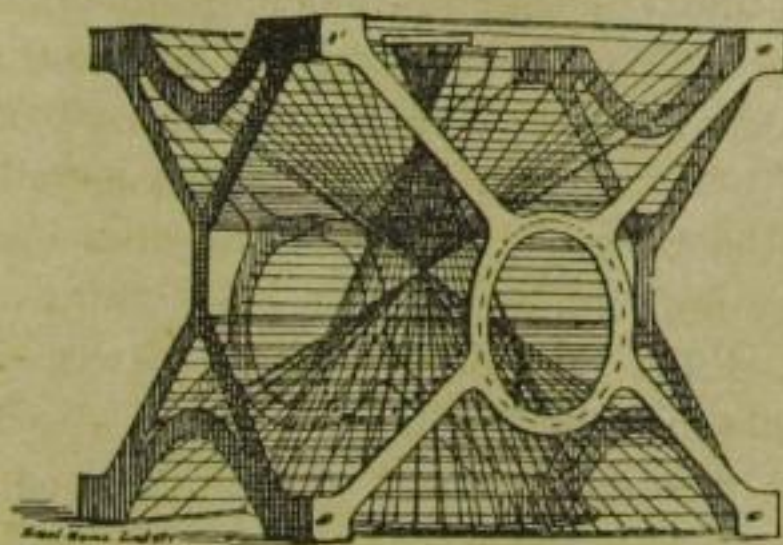
82—89. (XI.) Modelle (aus Draht) der eben genannten 8 Typen von Prof. *Wiener* in Karlsruhe. (11—17 cm.) . . . zusammen *M.* 45. —.

90. (VI. XIX. a, b, c, d.) Die Raumcurven dritter Ordnung auf Cylindern zweiter Ordnung. Je nachdem die unendlich ferne Ebene einer solchen Curve in einem reellen, oder in 3 reellen, oder in einem reellen und 2 zusammenfallenden (Berührung), oder endlich in 3 zusammenfallenden (Osculation) Punkten getroffen wird, unterscheidet man 4 verschiedene Typen, welche beziehungsweise cubische Ellipse, Hyperbel, cubisch-hyperbolische Parabel und cubische Parabel genannt werden, und die auf elliptischen, hyperbolischen (darauf befindet sich sowohl die Hyperbel als auch die cubisch-hyperbolische Parabel) und parabolischen Cylindern liegen. Vergl. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Theil, pag. 88 ff. (2. Aufl.) Von stud. math. *Lange* modellirt und mit einer Erläuterung versehen. (7—10 cm.)

zusammen *M.* 18. —.

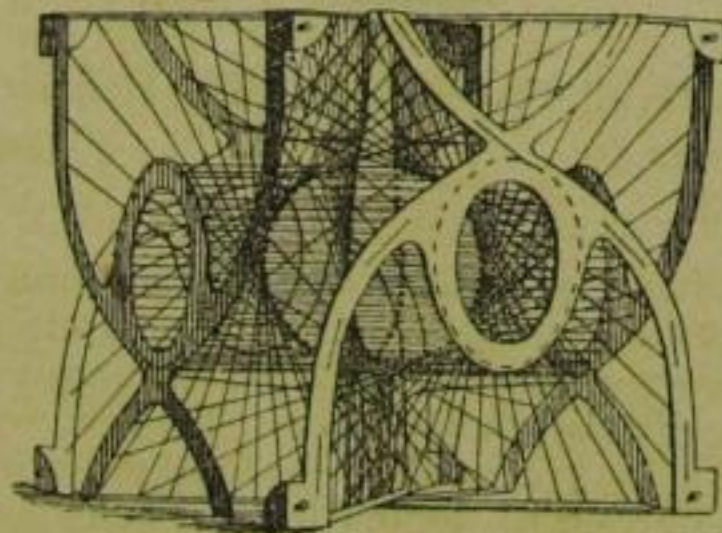
91—94. (XII. 1—4.) Vier Fadenmodelle zu der Raumcurve vierter Ordnung erster Art und

ihrer abwickelbaren Fläche. Von Dr. *Hermann Wiener* in Karlsruhe. Vergl. die Beschreibung auf S. 24—27 des Catalogs.



91. Erster Fall: Die Curve liegt auf vier reellen Kegeln. Darstellung der Curve als Schnitt dieser Kegel . . . *M.* 110. —.

92. Desgl.: Die abwickelbare Fläche der Tangenten der Curve . . . *M.* 110. —.



93. Zweiter Fall: Die Curve liegt auf zwei reellen und zwei imaginären Kegeln. Darstel-

lung als Schnitt jener beiden. Das Modell zeigt zugleich die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten *№ 110. —.*

94. Dritter Fall: Die Curve liegt auf vier

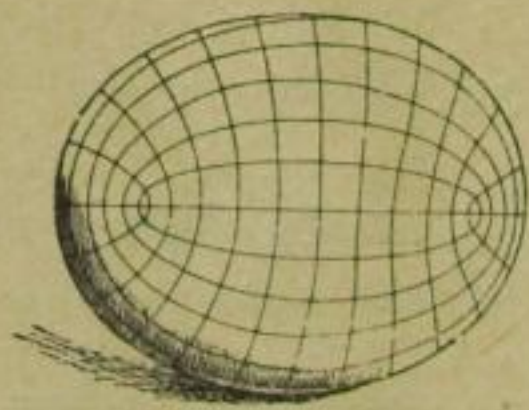
imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt zweier geradliniger Hyperboloide. Das Modell zeigt zugleich die abwickelbare Fläche der Tangenten *№ 70. —.*

V. Krümmung der Flächen.

A. Krümmungslinien, Asymptotencurven*) u. geodätische Linien auf Flächen.

95—101. Krümmungslinien von Flächen zweiter Ordnung. Modellirt von *R. Diesel*, Stud. der techn. Hochschule München. Nebst zwei erläuternden Abhandlungen.

95. (III. 2.) Ellipsoid mit den beiden Schaaren von Krümmungslinien. Die Hyperboloide erster und zweiter Art, welche mit dem Ellipsoid zu demselben confocalen Flächensystem gehören, schneiden aus ihm die Krümmungslinien aus (die Schnittcurven eines confocalen Flächensystems sind für alle 3 Schaaren Krümmungslinien). Man kann diese Curven auch dadurch erhalten, dass man in 2 von den 4 Nabelpunkten (den Berührungspunkten der zu den Kreisschnitten parallelen Tangentialebenen) die Endpunkte eines Fadens befestigt und ihn vermittelst eines Stiftes anspannt. Lässt man den Stift sich bewegen, so beschreibt er eine Krümmungslinie. Axenverhältniss des Ellipsoids $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$, grosse Halbaxe 5 cm. (10—6 cm.) *№ 2. 80.*



96. (III. 4.) Dasselbe, grosse Halbaxe 9 cm. (18—11 cm.) *№ 6. 80.*

*) Eine Asymptoten- oder Haupttangenten-curve ist eine [übrigens nur für die sattelförmigen d. h. convex-concaven (negativ-gekrümmten) Partien der Fläche reelle] Linie, längs deren jede Tangente in 3 consecutiven Punkten trifft. In solchen Partien ist demnach die Fläche von 2 Systemen Asymptoten-Curven überdeckt, welche im Allg. nicht, wie die beiden Systeme von Krüm-

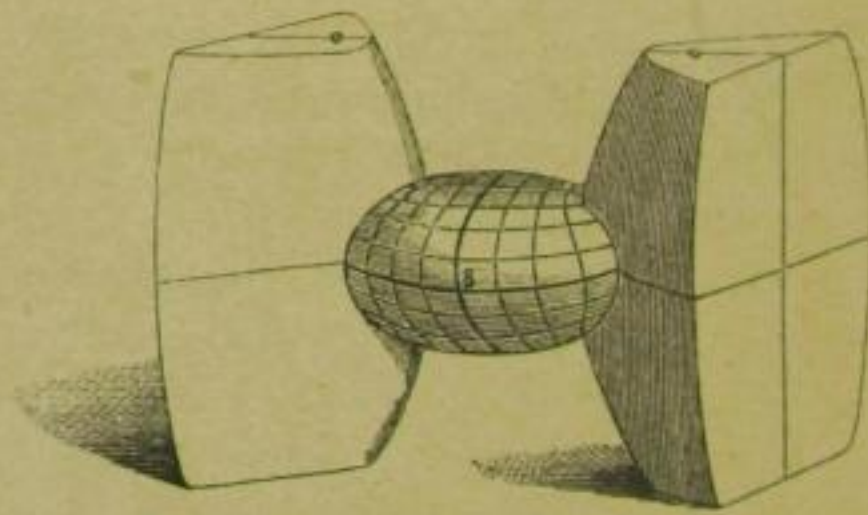
188—190.* (XVI. 1.—III.) a. Ellipsoid, welches durch seine Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt wird. Es sind die 3 Hauptschnitte und 18 Krümmungslinien aufgezeichnet.

b. Rechteckige Platte hierzu, mit geraden Linien versehen, welche den auf dem Mod. 1. ersichtlich gemachten Krümmungslinien entsprechen, sowie

c. Kugel mit 3 grössten Kreisen und 18 confokalen sphärischen Kegelschnitten, welche wiederum den Krümmungslinien des Ellipsoids entsprechen *zus. № 30. —.*

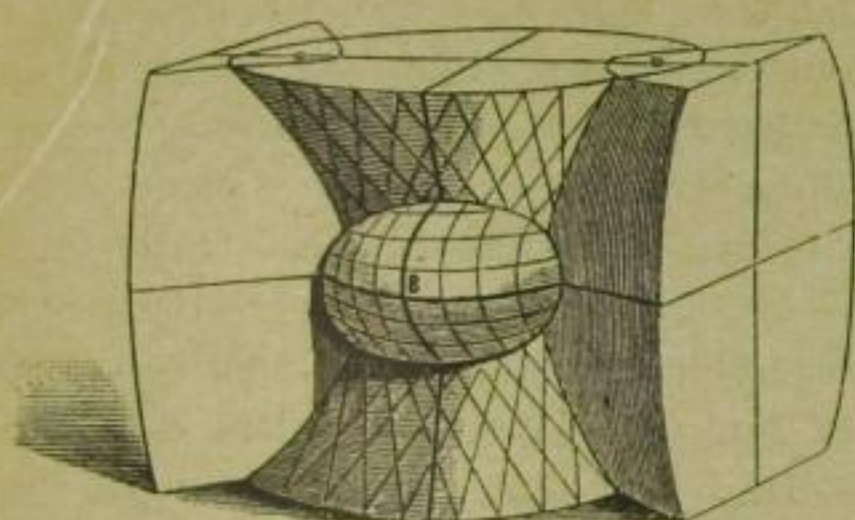
Zu den Mod. 1. u. III. gehört ein gemeinsamer Holzuntersatz, welcher dazu dient, beide Modelle in eine solche Lage zu bringen, dass die Mittelpunkte derselben sich in gleicher Höhe befinden, während die Ebenen der drei einander entspr. Hauptschnitte parallele Lage erhalten.

193. (XVI. vi.) Vereinigung des vorgenannten Ellipsoids mit einem confokalen einschaligen Hyperboloid *№ 16. —.*



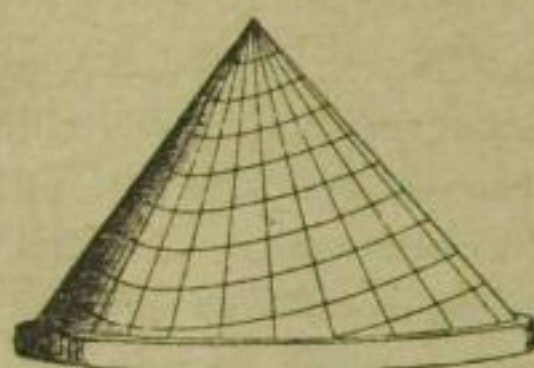
194. (XVI. vii.) Vereinigung desselben Ellipsoids mit einem confokalen zweischaligen Hyperboloid *№ 18. —.*

mungslinien, allenthalben auf einander senkrecht stehen, deren Winkel jedoch überall von den Elementen der Krümmungslinien halbirt werden. Die Asymptotencurven stehen nur senkrecht bei solchen Flächen, für welche die Indicatrix allenthalben eine gleichseitige Hyperbel ist, d. h. bei den Minimalflächen.

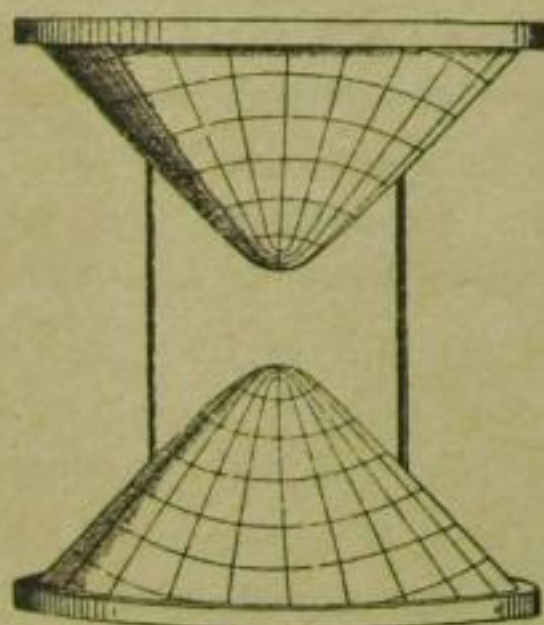


196. (XVI. ix.) Vereinigung des Ellipsoids mit einem confokalen einschaligen und einem confokalen zweischaligen Hyperboloid. *M.* 22. —.

97. (III. 7.) Einschaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien (vergl. Bemerkung zu Nr. 95). (23—23 cm.) *M.* 11. —.

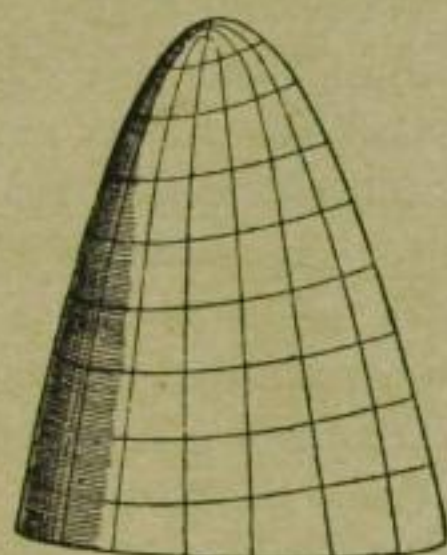


98. (III. 18.) Elliptischer Kegel mit Krümmungslinien. Die eine Schaar von Krümmungslinien sind hier die Erzeugenden, die andern sphärische Curven; sie werden durch einen Endpunkt eines Fadens beschrieben; dessen anderer Endpunkt in der Spitze befestigt ist. Dieser Kegel ist Asymptotenkegel zu 97 und 99. (23—13 cm.) *M.* 5. 60.



99. (III. 9.) Zweischaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien. Es besitzt 4 reelle Nabelpunkte. Das eine System von Krümmungslinien, das aus der Fläche durch die Ellipsoide des zugehörigen confocalen Systems ausgeschnitten wird, kann durch dieselbe Fadenconstruction

wie beim Ellipsoid construirt werden, das andere durch die einschaligen Hyperboloide ausgeschnittene aber nicht. (23—13 cm.) *M.* 16. 40.



100. (III. 12.) Elliptisches Paraboloid mit Krümmungslinien. Diese Curven schlingen sich um die 2 reellen Nabelpunkte desselben; das geschlossene System lässt sich durch die beim Ellipsoid angegebene Fadenconstruction finden. Diese Fläche gehört ebenfalls einem dreifach orthogonalen System an

$$[\text{Gleichung: } \frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + 2z = \lambda],$$

das 2 Systeme von elliptischen Paraboloiden, eines nach der positiven, das andere nach der negativen Seite der z -Axe geöffnet, und ein System hyperbolischer Paraboloiden enthält. Die Durchdringungscurven dieser Flächen sind Krümmungslinien derselben. (12-20 cm.) *M.* 6. 80.

101. (III. 16.) Hyperbolisches Paraboloid mit Krümmungslinien (vergl. Bemerkung zu der vorhergehenden Fläche). (16—12 cm.) *M.* 4. 70.

Hierher gehören ferner die unter II. B. aufgeführten Cycliden, deren Krümmungslinien bekannt sind, die unter III. als Nr. 81 aufgeführte Röhrenschraubenfläche und die Bianchi'sche Fläche V. B. Nr. 136.

102. (I. iv.) Geodätische Linien auf dem verlängerten Rotationsellipsoid. Das Problem führt auf elliptische Functionen. Es sind 3 Linien (roth, blau, violett) aufgezeichnet. Construirt und mit Erklärung versehen von stud. math. *Rohn.* (18—12 cm.) *M.* 6. —.

103. (I. v.) Geodätische Linien durch die Nabelpunkte (siehe Bemerkung zu Nr. 95) eines dreiaxigen Ellipsoides. Das Problem führt auf elliptische Functionen. Eine geodätische Linie durch den einen Nabelpunkt geht stets auch durch den ihm gegenüber liegenden und nähert sich nach einer Richtung asymptotisch demjenigen Hauptschnitt, der durch die beiden Nabel-

punkte geht. (Vergl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II. Theil, 2. Auflage, pag. 167 ff. Berechnet und construirt von stud. math. Rohn. Erläuterung beigegeben. (19—11 cm.) *M.* 6. —.

104. (V. xviii a.) Verlängertes Rotationsellipsoid mit geodätischen Linien und Enveloppen von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen. Diejenigen geodätischen Linien, welche die symmetrisch gestaltete der 2 rothen, vier-spitzigen Curven umhüllen, kommen von einem Punkte A des Aequators, diejenigen, welche die andere rothe Curve berühren, von einem auf einem Parallelkreis gelegenen Punkte A_1 . 2 der 4 Spitzen der zu A_1 gehörigen Enveloppe liegen selbstverständlich in dem durch A_1 gehenden Meridian, die 2 andern auf dem zum Parallelkreis durch A_1 symmetrisch gelegenen Parallelkreis und zugleich auf der geodätischen Linie, welche in A_1 den Parallelkreis durch A_1 berührt. (Vergl. Nr. 106.) (12—8 cm.) *M.* 6. 50.

105.* (X., II. N., xxxii c.) Dasselbe in grösserem Massstab. Die von einem Punkt A ausgehenden geodätischen Linien bilden eine Enveloppe, die von einem in A befestigten Faden umhüllt wird. (18—12 cm.)

106.* (V. xviii b.) Sphäroid (abgeplattetes Rotationsellipsoid) mit geodätischen Linien und Enveloppen von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen. Die Bedeutung und Gestalt der Curven wie in Nr. 104. (10—7 cm.) *M.* 6. 50.

107.* (X., II. N., xxxii b.) Dasselbe, grösserer Massstab. Durch einen im Punkte A befestigten Faden kann man die Erzeugung der Enveloppen demonstrieren. (18—13 cm.)

108.* (X., II. N., xxxii a.) Dreiaxiges Ellipsoid nebst Andeutung der Enveloppe von geodätischen Linien, welche von einem Punkt ausgehen. Durch den Ausgangspunkt der geodätischen Linien gehen 2 Krümmungslinien; die 4 Spitzen der Enveloppe (auch hier ist sie ein vier-spitziger Curvenzug) liegen zu je zweien auf denjenigen Krümmungslinien, welche zu den durch den Ausgangspunkt gehenden beiden symmetrisch liegen. (Vergl. Dr. A. von Braunmühl's Abhandlung in den Mathem. Annalen, Bd. 20, pag. 557 ff.) (19—11 cm.)

Nr. 105, 107 u. 108 zusammen *M.* 14. —.

Die Modelle Nr. 104 bis 108 wurden von Dr. A. von Braunmühl construirt. (Vergl. dessen Abhandlung in den Mathem. Annalen Bd. 14, pag. 553 ff. und Bd. 20). Erläuterung beigegeben.

109.* (X., I. N., 2 b.) Modell zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoides aus 2 gegebenen confocalen Flächen zweiten Grades. Wenn ein geschlossener unausdehnbarer Faden, der um zwei ineinandergefügte confocale Flächen, ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid, herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt derart gespannt wird, dass er beständig jeden der beiden durch das Ellipsoid getrennten Theile des Hyperboloides berührt (sei es in einem Punkt oder längs eines ganzen Curvenzugs), so beschreibt der Punkt ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid. Der rothe Faden legt sich an beide Theile des Hyperboloides längs eines Theiles der Schnittcurve an (erster Fall), der andere, gelbe, nur an den einen Theil, berührt dagegen den andern nur in einem Punkt (zweiter Fall). (20—9 cm.)

110.* (X., I. N., 2 a.) Modell (aus Draht) zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoides aus den 2 Focalcurven des zum Ellipsoid gehörigen confocalen Flächensystems. (Specieller Fall der vorigen Erzeugungsweise). Der Apparat gestattet nur das obere vordere Viertel des Ellipsoides zu construiren; dabei muss sich der Faden von unten an die Ellipse, von hinten an die Hyperbel anlegen. Die Länge des Fadens ist gleich der grössten Axe des Ellipsoides, vermehrt um die Differenz der Excentricität der Ellipse und Hyperbel. (20—10 cm.)

Beide Modelle sind von Dr. O. Staude construirt. (Vergl. dessen Abhandlung in den Mathem. Annal. Bd. 20, pag. 147.) Erläuterungen desselben Verfassers sind beigegeben. Beide zus. *M.* 12. —.

111.* (X., II. N., xxxi a.) Bohnenförmiger Körper mit Symmetrieebenen zur Anstellung von Proben bezüglich des Verlaufes der Krümmungslinien, Asymptoten- und parabolischen Curven auf einer Fläche. (14—8 cm.)

112.* (X., II. N., xxxi b.) Dasselbe, andere Gestalt (tordirte Bohne). (10—6 cm.)

Beide Modelle zusammen *M.* 1. 50.

113—124. (X., II. N., xxx a—m.) Modelle von verschiedenen Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptotencurven. Man gelangte zu denselben durch die Frage nach solchen Rotationsflächen, deren Asymptotencurven zur Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Axe, gegebene Curvensysteme (logarithmische Linien, Kreise etc.) besitzen. a. bis l. von stud. math. Herting berechnet und modellirt. Zusammen *M.* 60. —.

113.* (X., II. N., xxx a.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel um ihre Scheiteltangente. Gleichung der Fläche:

$$z^2 = r \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

der Projection der Asymptotencurven in Polarkoordinaten: $\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} \log r$. (19—13 cm.)

114.* (X., II. N., xxx b.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der cubischen Parabel um ihre Wendetangente. Gleichung der Fläche: $z^3 = 27r$, der Projection der Asymptotencurven in Polarkoordinaten: $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \log r$. (14—14 cm.)

115.* (X., II. N., xxx f.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Neil'schen Parabel um ihre Rückkehrtangente. Gleichung der Fläche: $z^3 = 25r^2$, der Projection der Asymptotencurven in Polarkoordinaten: $\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}} \log r$. (14—17 cm.)

116.* (X., II. N., xxx d.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der gleichseitigen Hyperbel um eine ihrer Asymptoten. Gleichung der Fläche: $z \cdot r = 6$, der Projection der Asymptotencurven in Polarkoordinaten: $\varphi = \sqrt{2} \log r$. (15—16 cm.)

117.* (X., II. N., xxx c.) Rotationsfläche, deren Gleichung ist: $zr^2 = 8$. Gleichung der Asymptotencurven: $\varphi = \sqrt{3} \log r$. (15—16 cm.)

118.* (X., II. N., xxx e.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der logarithmischen Spirale um ihre Asymptote. Gleichung der Fläche: $z = 6 \log r$, der Projection der Asymptotencurven: $\varphi = \log r$. (16—11 cm.)

119.* (X., II. N., xxx k.) Rotationsfläche, entstanden durch Drehung der Parabel um eine Parallele zur Axe. Gleichung der Fläche: $z = a(r-a)^2$, der Projection der Asymptotencurve: $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r}{a}}$, (Cardioide). (16—16 cm.)

120.* (X., II. N., xxx g.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel um eine Parallele zur Scheiteltangente. Gleichung der Fläche: $z^2 = a^2(r-a)$, der Projection der Asymptotencurven:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) - a}{a}.$$

(18—15 cm.)

121.* (X., II. N., xxx h.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Cubischen Parabel

um eine Parallele zur Wendetangente. Gleichung der Fläche: $z^3 = a^3(r-a)$, der Projection der Asymptotencurven:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) \pm a}{a}.$$

(18—19 cm.)

122.* (X., II. N., xxx i.) Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Neil'schen Parabel um eine Parallele zur Rückkehrkante. Gleichung der Fläche: $z^3 = a^3(r-a)^2$, der Projection der Asymptotencurven:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) - a}{a}.$$

(13—17 cm.)

123.* (X., II. N., xxx l.) Rotationsfläche, deren Gleichung ist:

$$z = \frac{1}{2c} \left(r \sqrt{c^2 - r^2} - c^2 \arccos \frac{r}{c} \right).$$

Die Projection der Asymptotencurven ergibt ein System von Kreisen, die durch denselben Punkt gehen. (14—20 cm.)

124.* (X., II. N., xxx m.) Rotationsfläche, entstanden durch Rotation der Sinuslinie: $z = \cos r$. Das Modell erläutert das Verhalten der Asymptotencurven in der Nähe der parabolischen Curve. Im Allgemeinen setzen die Asymptotencurven auf die parabolische Curve mit Spitzen auf, und nur wenn letztere die Berührungcurve einer Doppeltangentialebene ist, wird sie von den Asymptotencurven berührt. Die aufgezeichneten Kreise bilden die parabolische Curve. Berechnet und construirt von stud. math. Sievert in München. (21—5 cm.)

125. (II. VII.) Fläche dritter Ordnung vierter Classe mit 4 reellen konischen Knoten, auf welche eine Asymptotencurve (gelb) aufgezeichnet ist; entspricht dualistisch einer Asymptotencurve der Steiner'schen Fläche (vierter Ordnung, dritter Classe) und ist nach Clebsch (Crelle Bd. 67, S. 9) eine Raumcurve sechster Ordnung, vierter Classe, die in jedem Knotenpunkt der Fläche einen Rückkehrpunkt besitzt. Von stud. math. Bacharach. Erläuterung beigegeben. (14—22 cm.) M. 14. —.

Geodätische Linien bzw. Asymptotencurven finden sich auch auf den Flächen von constantem Krümmungsmass V. B. Nr. 126, 127, 132—134 und von constanter mittlerer Krümmung V. C. Nr. 140—144, 146 u. 147.

B. Flächen von constantem Krümmungsmass und auf einander abwickelbare Flächen.

Für die Flächen von constantem Krümmungsmass ist das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien, dessen reciproker Werth nach Gauss gleich dem Krümmungsmass der Fläche in dem betrachteten Punkt ist, an jeder Stelle dasselbe. Nach dem Vorzeichen dieses Produktes unterscheidet man Flächen von constanter positiver oder negativer Krümmung oder von der Krümmung Null. Alle Flächen von gleichem constanten Krümmungsmass sind ohne Faltung und Dehnung auf einander aufbiegbar und in sich selbst verschiebbar, wie z. B. die Ebene oder die Kugel. Man kann auf solchen Flächen daher von Congruenz der Figuren reden, weil man getrennt gelegene Flächenstücke durch Verschiebung zur Deckung bringen und mit einander vergleichen kann. Die nothwendige Bedingung zum Aufbau einer Geometrie, im Euklidischen Sinn, ist damit für diese Flächen gegeben; an die Stelle der »Geraden« tritt hier nur die kürzeste oder allgemeiner die »geodätische Linie«. Die Geometrie auf den Flächen von constanter positiver Krümmung ist die gewöhnliche sphärische Geometrie; die auf den Flächen von constanter negativer Krümmung wird die Nicht-Euklidische Geometrie genannt und deckt sich mit der durch Lobatschewsky begründeten, welche des elften Axioms von Euklid entbehrt. Der Unterschied dieser und der sphärischen ist im verschiedenen Verhalten der geodätischen Linien begründet (vergl. die diesbezüglichen Anmerkungen bei beiden Flächengattungen).

Die nachfolgenden Flächenmodelle sind unter anderm dem Studium dieser Geometrie zu dienen bestimmt. Zu diesem Zweck sind einzelnen Nummern verbiegbare Messingbleche von dem Krümmungsmass der Flächen beigegeben.

Die partielle Differentialgleichung, durch welche diese Flächen definirt sind, wird unter Voraussetzung einer Rotationsfläche zu einer gewöhnlichen integrirbaren und liefert für die Meridiancurve der Fläche die Gleichung:

$$z = \int V \frac{c - r^2}{r^2 - c \mp t^2} dr;$$

wobei $\pm t^2$ das constante Krümmungsmass der Fläche bezeichnet.

Sowohl für die Flächen positiver wie für die negativer Krümmung erhält man 2 ver-

schiedene Typen, zwischen denen ein Uebergangsfall mit einfacheren Eigenschaften liegt (Kugel und Tractrixfläche).

126—128. (V. xiii.) Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass mit geodätischen Linien. 3 Typen mit gleichem Krümmungsmass $= \frac{1}{4,33^2}$ (in Centimetermass). Da diese Flächen auf eine Kugel abwickelbar sind und geodätische Linien bei der Abwicklung erhalten bleiben, so treffen sich alle von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien wieder in einem Punkt. Nach Zeichnungen von E. Bour (Journal de l'Ecole Polytechnique, Tome 22) modellirt und mit geodätischen Linien versehen von Assistent Dr. P. Vogel.

126. (V. xiii b.) Spindeltypus; die Meridiancurve trifft die Axe. (7—11 cm.) . . . *M.* 4. —.

127. (V. xiii c.) Wulsttypus; die Meridiancurve der Fläche trifft die Axe nicht. (12—10 cm.) *M.* 9. —.

128. (V. xiii a.) Kugel; Zwischenfall, Radius 4,33 cm. (9—9 cm.) *M.* 1. —.

Die Flächen constanter Krümmung sind, wie bereits erwähnt, in sich selbst verschiebbar und auf einander abwickelbar. Man kann dies durch die biegsamen, auf die Flächen aufgepassten Streifen von Messingblech verificiren.

129. (X., I. N., 6.) Flächenstreifen von constanter positiver Krümmung aus Messing (Kugelzone, einem Centriwinkel von fast 90° entsprechend).

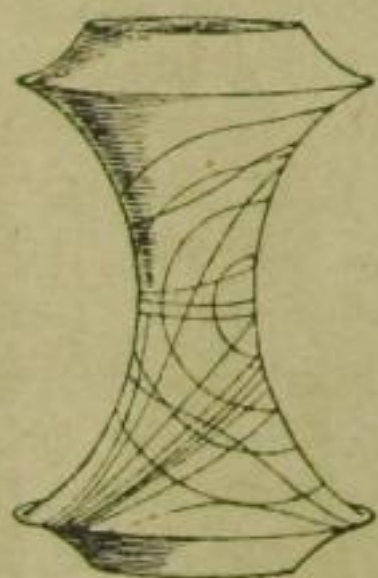
130. (X., I. N., 6.) Halbkugel aus Messing. zusammen *M.* 4. 50.

131. (V. xiv.) Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass, auf die vorhergehenden 3 Flächen abwickelbar, indem das Krümmungsmass mit dem der vorhergehenden Flächen übereinstimmt. Die Gleichung der Meridiancurve führt auf elliptische Functionen. Ganghöhe der Schraube 10,9 cm. Schneidet man aus der vorherigen Kugel eine von 2 gleich grossen Parallelkreisen begrenzte Zone (einem Centriwinkel von 90° entsprechend) heraus, so geht diese durch gegenseitige Verschiebung der Endsnitte in diese Schraubenfläche über, wie sich dies mit Hülfe der Kugelzone aus Messingblech zeigen lässt. (15—34 cm.) *M.* 13. —.

Von stud. math. Kuen. Erläuterung hierzu und auch zu den vorhergehenden Rotationsflächen beigegeben.

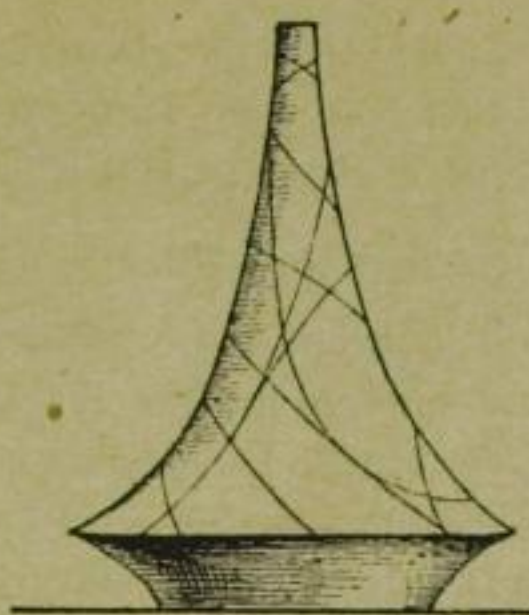
Die Flächen constanten negativen Krümmungsmasses unterscheiden sich wesentlich durch die Eigenschaften ihrer geodätischen Linien von denen positiver Krümmung. Die von einem Punkt ausgehenden Linien treffen sich überhaupt nicht mehr. Durch einen Punkt der Fläche gehen unendlich viele Linien, die eine gegebene geodätische Linie schneiden, zwei (nach jeder Seite eine) zu ihr parallele (sie im Unendlichen treffende) und unendlich viele sie nicht schneidende. Unter einem geodätischen Kreis versteht man diejenige Curve, die der Endpunkt eines am anderen Endpunkte befestigten, auf der Fläche aufliegenden, angespannten Fadens beschreibt. Um Vieldeutigkeit zu vermeiden, hat man sich eine Rotationsfläche als unendlich dünne, über das Modell der Rotationsfläche unendlich oft gewickelte Haut zu denken (als Schraubenfläche von der Ganghöhe Null).

132. (II. ix.) Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Kegeltypus), nebst geodätischen Linien (blau) und einer Haupttangente. Von stud. math. *Bacharach*. Erläuterung beigegeben. (18—17 cm.) . *M.* 9. —.



133. (II. x.) Ebenso (Hyperboloidtypus). Es ist ein System paralleler geodätischer Linien aufgezeichnet (grün), worunter sich 2 (roth) befinden, die sich dem Kehlkreis asymptotisch nähern. Die geschlossenen Curven sind geodätische Kreise. Von stud. math. *W. Dyck*. Erläuterung beigegeben. (14—21 cm.) . *M.* 12. —.

134. (I. 1.) Rotationsfläche der Tractrix, durch Umdrehung um ihre Asymptote entstanden. (Die Tractrix ist durch die Eigenschaft definirt, dass alle Tangenten zwischen dem Berührungspunkt und einer Geraden, der Asymptote, constante Länge besitzen). Diese Fläche bildet den Uebergang zwischen den beiden vorgenannten Flächen und entspricht der Kugel bei den Flächen constanter positiver Krümmung. Die blau gezeichneten



Curven auf ihr sind verschiedene geodätische Linien, die rothe ist eine Asymptotencurve. Von stud. math. *Bacharach*. Erläuterung beigegeben. (19—24 cm.) . . . *M.* 9. —.



135. (V. xv.) Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass, deren Meridiancurve die Tractrix ist. Sie ist die einzige Schraubenfläche von der erwähnten Art, in deren Gleichung nicht elliptische Functionen eintreten. (Bei Flächen constanter positiver Krümmung gibt es keine von dieser Eigenschaft.) Vergl. U. Dini, *Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris* 1865, I. Sem. pag. 340; Th. Kuen, *Berichte der kgl. bayr. Acad.* 1884. Von Dr. *P. Vogel*. Erläuterung beigegeben. (15—24 cm.) . *M.* 15. 50.



136. (VIII. xx.) Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungs-

linien. Sie entsteht aus der Tractrixfläche dadurch, dass man auf den Tangenten an ein System von parallelen geodätischen Linien (Krümmung derselben $-\frac{1}{t^2}$) das Stück t in bestimmtem Sinn aufträgt. Die Fläche besitzt eine ebene und eine räumliche Rückkehrkante mit 2 Spitzen, sowie eine Doppelcurve. Das eine System von Krümmungslinien wird von Ebenen ausgeschnitten, welche durch eine (im Modell vertikal gestellte) Gerade hindurch gehen. Das andere System liegt auf Kugeln, deren Mittelpunkte in dieser Geraden liegen. (Vergl. Bianchi, Math. Annalen Bd. 16, sowie Enneper, Göttinger Nachrichten 1868; Th. Kuen, Sitzungsberichte der kgl. bayr. Acad. 1884, Heft II.) Modellirt von stud. math. Mack. Erläuterung hierzu von Assistent Th. Kuen. (16—25 cm.) *M.* 16. —.

137. (VIII. xxvi a.) Schraubenfläche, auf das Rotationsellipsoid Nr. 138 abwickelbar (nach E. Bour, Journal de l'Ecole Polyt., Bd. XXII.). Von Assistent Dr. P. Vogel. (12—26 cm.) *M.* 10. 50.

138. (VIII. xxvi c.) Rotationsellipsoid, auf die vorige Fläche abwickelbar. (9—3 cm.) *M.* 1. 50.

139. (VIII. xxvi b.) Rotationsellipsoid aus biegsamem Messingblech zur Demonstration der erwähnten Abwicklung. Die durch 2 gleich grosse Parallelkreise begrenzte Zone obigen Ellipsoids geht durch einen leichten Druck in die vorhin erwähnte Schraubenfläche über. *M.* 2. 50.

In diesen Abschnitt gehört noch die in der folgenden Abtheilung aufgezählte windschiefe Schraubenfläche Nr. 145, welche auf das Catenoid abwickelbar ist.

C. Flächen von constanter mittlerer Krümmung, Minimalflächen.

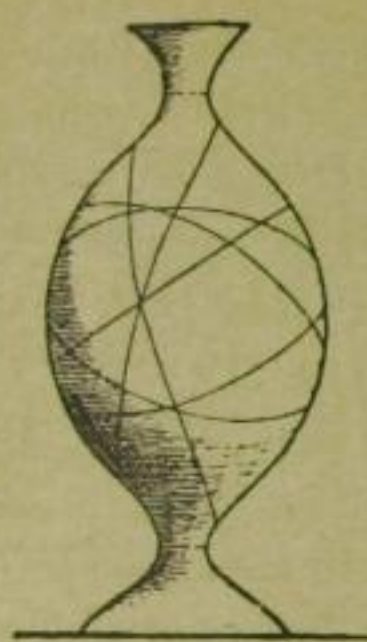
Die Flächen von constanter mittlerer Krümmung sind dadurch definirt, dass die Summe der reciproken Werthe ihrer 2 Hauptkrümmungsradien an jeder Stelle denselben Zahlenwerth besitzt. Die partielle Differentialgleichung, durch welche sie definirt sind, geht in eine integrierbare totale über, wenn man sich auf Rotationsflächen beschränkt, und zwar erhält man für die Meridiancurve die Gleichung:

$$z = \int \frac{r^2 \pm a_1 a_2}{\sqrt{(a_1^2 - r^2)(r^2 - a_2^2)}} dr.$$

Nach Delaunay (Comptes rendus XIII. 1841) ergibt sich die Meridiancurve dieser Flächen auch als diejenige Curve, die der Brennpunkt eines Kegelschnittes beim Abrollen auf einer Geraden beschreibt, welche dann Rotationsaxe wird. Den 3 Kegelschnitten: Ellipse, Hyperbel, Parabel entsprechend erhält man 3 verschiedene Typen, die von Plateau in seinem Werke: »Statique expérimentale et théorique des liquides etc.« beziehungsweise: Onduloid, Nodoid, Catenoid genannt wurden. Nach Laplace werden die Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten, welche der Einwirkung der Schwere entzogen sind, von Flächen constanter mittlerer Krümmung begrenzt. Geometrisch lassen sie sich auch als gewisse Parallellflächen zu Flächen von constantem positiven Krümmungsmass definiren. Einen speciellen Fall davon bilden die Minimalflächen, deren mittlere Krümmung Null ist. Dieselben haben die Eigenschaft, einen kleineren Flächeninhalt zu besitzen als jede andere benachbarte Fläche, die durch eine beliebige auf ihr geführte geschlossene Randcurve hindurch gelegt wird. Sie ergeben sich mechanisch als diejenigen Flächen, welche die zwischen eine gegebene Randcurve sich einspannende Flüssigkeitshaut (durch Eintauchen der Curve in Seifenlösung zu erhalten) annimmt.

Die Minimalflächen werden sowohl durch ihre Krümmungs- wie auch ihre Asymptotencurven in unendlich kleine Quadrate getheilt. (Die Indicatrix ist für diese Flächen eine gleichseitige Hyperbel, desshalb stehen auch die Asymptotencurven auf einander senkrecht). Zu jeder Minimalfläche gibt es eine zweite, ihre sogenannte Bonnet'sche Biegungsfläche, welche auf sie derart abwickelbar ist, dass die Krümmungslinien der einen in die Asymptotencurven der andern übergehen. Vergl. Schwarz in Crelle's Journ. Bd. 80.

140—143. (II. viii.) Drei Typen von Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung mit geodätischen Linien. Das Verhalten der letzteren ist je nach dem Winkel, unter dem sie den grössten Parallelkreis trifft, ein verschiedenes. Entweder bewegt sie sich zwischen 2 Parallelkreisen (blau), oder sie nähert sich asymptotisch dem Kehlkreis, d. i. Parallelkreis von kleinstem Radius (grün), oder sie läuft über die ganze Fläche hin. Von stud. math. A. v. Braunmühl. Erläuterung beigegeben.



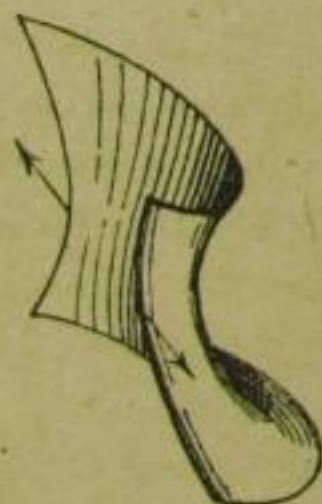
140. (II. viii a.) Onduloid. Die Meridiancurve ergibt sich für $\alpha_1 = 1$ cm., $\alpha_2 = 5,77$ cm. aus der oben angegebenen Gleichung, falls von den 2 daselbst vorkommenden Vorzeichen das obere (positive) gewählt wird. (12—26 cm.) *M.* 9. —.

141. (II. viii b.) Nodoid. α_1 und α_2 wie oben, aber in der Gleichung ist das untere (negative) Vorzeichen zu wählen. (11—8 cm.) *M.* 8. —.

142. (II. viii c.) Ring des Nodoids, durch Umdrehung der Schleife der Meridiancurve von b. entstanden. (9—3 cm.) *M.* 2. —.

143. (II. viii d.) Catenoid, durch Umdrehung der Kettenlinie um ihre Axe entstanden. Ausser den 3 verschiedenen Typen von geodätischen Linien ist hier auch noch eine Asymptotencurve (gelb) aufgezeichnet. Diese Fläche ist eine Minimalfläche, sie besitzt die constante mittlere Krümmung Null. (16—10 cm.) *M.* 8. —.

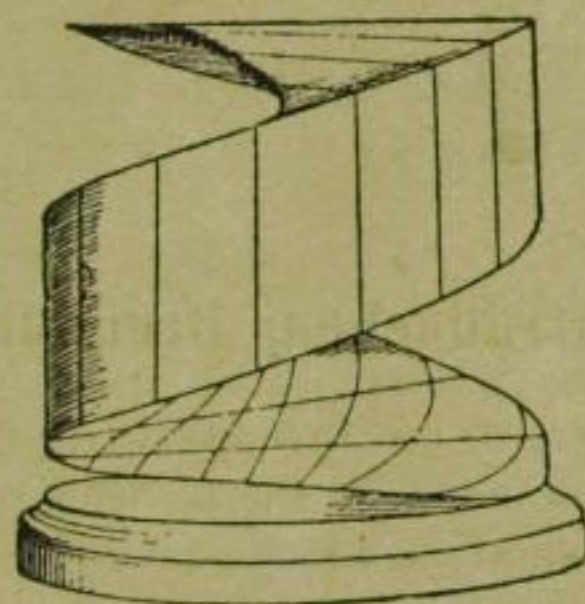
144. (VIII. xxv c.) Dasselbe, grösser, mit aufgezeichneten Krümmungslinien (weiss) und Asymptotencurven (roth). Diese Fläche ist die Bonnet'sche Biegungsfläche zur folgenden windschiefen Schraubenfläche (Nr. 146). Beim Aufbiegen beider auf einander geht der Kehlkreis in die Axe der letzteren über, die Meridiane in die geraden Erzeugenden, Parallelkreise in die Schraubenlinien. (20—15 cm.) *M.* 10. 50.



145. (VIII. xxv b.) Dasselbe aus biegsamem Messingblech. Die Fläche wird in die windschiefe

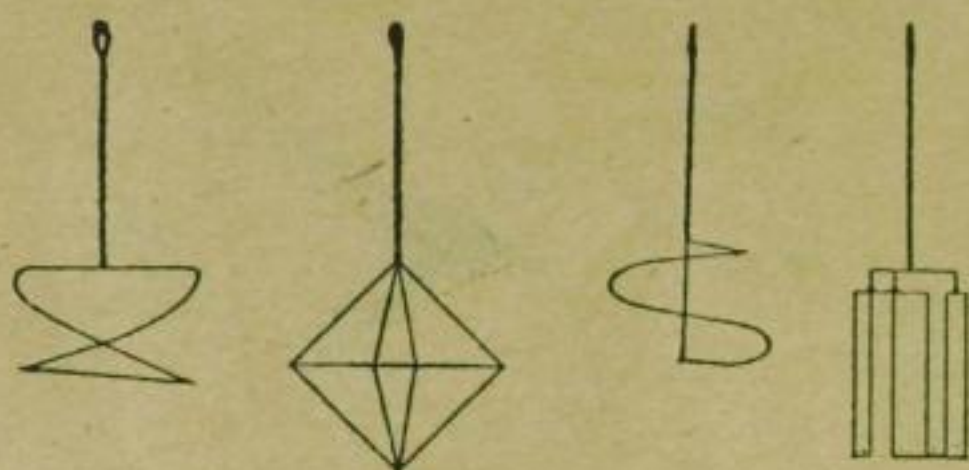


Schraubenfläche dadurch übergeführt, dass man die Endpunkte des Kehlkreises fasst und diesen in eine Gerade auszieht, indem man gleichzeitig ein wenig tordirt . . . *M.* 2. —.



146. (VIII. xxv a.) Windschiefe Schraubenfläche, Minimalfläche, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven; auf das Catenoid (Nr. 143) abwickelbar. Von cand. math. *Herting*. (22—23 cm.) *M.* 17. —.

147. (VIII. xxi.) Minimalfläche neunter Ordnung nach Enneper (vergl. Göttinger Nachrichten 1871, pag. 28 ff.). Sie besitzt 2 ebene Doppelcurven dritter Ordnung, in welchen die aufgezeichneten beiden Schaaren von Krümmungslinien (ebenfalls ebene Curven dritter Ordnung; die Ebenen derselben sind alle je einer Geraden parallel) je einen Doppelpunkt besitzen. Die Fläche besitzt 3 dreifache Gerade, nämlich die unendlich ferne Gerade in der Horizontalebene und die in einer solchen Ebene liegenden 2 rothen Geraden. Von den 3 durch diese letztere gehenden Mänteln sind aber 2 imaginär. Sie lässt sich dadurch mit sich selbst zur Deckung bringen, dass man die eine Doppelcurve in die andere verlegt. Ihre Bonnet'sche Biegungsfläche ist sie selbst wieder, d. h. diese Fläche kann auf sich selbst aufgebogen werden. Dabei gehen Krümmungslinien (weiss) in die Asymptotencurven (roth) über. Von cand. math. *Herting*. Erläuterung beigegeben. (34—26 cm.) *M.* 21. —.



148. (X., I. N., I. a—k.) Verschiedene Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen durch Lamellen von Seifenwasser nebst einer Anweisung zur Herstellung der Seifenlösung nach Angabe von Plateau (*Statique des liquides*).
M. 12. —.

Näheres siehe I. Theil dieses Catalogs, X. Serie, I. Nachtrag.

D. Centraflächen, Brennflächen.

149—151. (I. II.) Brennfläche eines Strahlensystems, welche mit der Fläche der Krümmungcentra des elliptischen Paraboloides in collinearer Verwandtschaft steht. (Vergl. Seidel, Schumachers *Astron. Nachrichten*, Nr. 1027 ff., *Monatsberichte der Berliner Academie*, Dec. 1872.) Das vorliegende Modell stellt sehr nahe die Centrafläche des Paraboloides:

$$\frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{10} - 2x = 0$$

dar; die vorzunehmende Transformation wäre $X=x$, $Y=y$, $Z=\sqrt{1,2} \cdot z$. Die Fläche ist von der zwölften Ordnung und besitzt 2 Rückkehrkanten, beide gewöhnliche Parabeln, welche

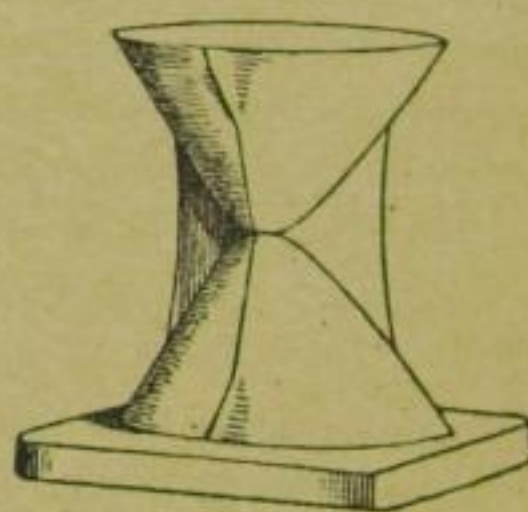
in zu einander senkrechten Ebenen liegen; ferner eine Doppelcurve zwölfter Ordnung, längs deren sich die beiden Mäntel durchsetzen. Von stud. math. *Schleiermacher*. Erläuterung beigegeben.

149 u. 150. (I. II a.) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt. (11—9 u. 7—11 cm.) à M. 5. —.

151. (I. II b.) Die beiden Mäntel vereinigt. (11—9 cm.) . . . M. 5. —.

152—154. (I. III.) Centrafläche des einschaligen Hyperboloides. Sie ist zwölfter Ordnung und besitzt 3 ebene Rückkehrkanten, nämlich 2 Hyperbeln und eine Ellipse, welche in 3 zu einander senkrechten Ebenen liegen; ferner eine Doppelcurve 24. Ordnung (Vergl. Cayley: „On the Centro-Surface of an Ellipsoid; Cambridge, Philos. Transactions, vol. XII. pag. 319 ff.; Salmon-Fiedler, *Analyt. Geometrie des Raumes* Bd. 1, Art. 207 und Bd. 2, Art. 244, 2. Aufl.). Von stud. math. *W. Dyck*. Erläuterung beigegeben.

152 u. 153. (I. III a.) Die beiden Mäntel getrennt. (16—13 cm.) . . . zusammen M. 17. —.



154. (I. III b.) Die beiden Mäntel vereinigt. (16—17 cm.) . . . M. 10. —.

VI. Modelle zur darstellenden Geometrie, Physik und Mechanik.



155. (VIII. xxIII.) Reliefperspectivische Darstellung eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcyinders, auf einem Untersatz vereinigt.

Der Augenpunkt befindet sich in der Verlängerung der Rotationsaxe des Kugelreliefs, 56 cm. vor der vorderen Bildfläche des Modells, genauer: vor der Collineationsebene, die durch die obere Kante des Gesimses, welches die Basis des Modells begrenzt, hindurchgeht. Die Fluchtebene des Bildraums ist 28 cm. hinter der Collineationsebene gelegen. Die Tiefe des abgebildeten Raums beträgt etwa 16,5 cm. Um den gewünschten Eindruck zu erhalten, stelle man das Modell in gedämpftem Licht vor einer

einfarbigen Wandfläche auf und betrachte es durch einen im Augenpunkt angebrachten kleinen kreisförmigen Ausschnitt.

156. (V. xvii.) Die Kettenlinie auf der Kugel (Vergl. die Abhandlung von Clebsch in Crelle's Journal, Bd. 57, pag. 104 ff.). Die beiden auf der Kugel vereinigten Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reducirt; in den Bezeichnungen der genannten Abhandlung:

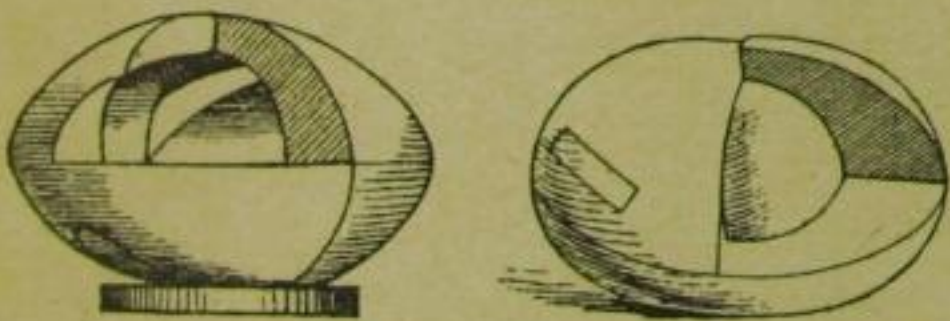
$$\varrho \sin \varepsilon = 1, \quad a) \varrho = \frac{3}{4}, \quad b) \varrho = \frac{5}{4}.$$

Durch eine Schnur von Glasperlen lassen sich die Curven leicht experimentell verificiren. Berechnet von Assistent Fischer. (9—15 cm.) *M.* 8. —.

157. (II. xi.) Bahncurve eines schweren Punktes auf der Kugel (Sphärisches Pendel). Es ist der Fall dargestellt, wo der oberste (Ausgangs-) Punkt der Bahn sich in der Höhe des Mittelpunktes befindet, und die Anfangsgeschwindigkeit in diesem Punkte ist so gross gewählt, dass die Bahncurve sich nach 3 Perioden schliesst. Auch ist der geometrische Ort der untersten Punkte der verschiedenen Ortslinien angegeben, welche verschieden grossen Anfangsgeschwindigkeiten im Anfangspunkt entsprechen. Die Berechnung der Bahn u. s. w. ist von stud. math. Schleiermacher ausgeführt. (20—15 cm.) *M.* 11. —.

158. (VI. 3.) Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit negativer Doppelbrechung. Ein Ausschnitt des Sphäroids zeigt die Kugel, welche mit jenem zusammen die Wellenfläche bildet. Das Axenverhältniss: 8,8 : 7,8 ist ungefähr das des Kalkspathes. (9—8 cm.) *M.* 4. —.

159. (X., I. N., 7.) Dasselbe für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung. Ein Ausschnitt der Kugel zeigt das verlängerte Rotationsellipsoid. Das Axenverhältniss entspricht ungefähr dem des Zinnobers. (9—9 cm.) *M.* 4. —.



160. (VI. 1.) Fresnel'sche Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle, längs eines Haupt-

schnittes zerlegbar, so dass der innere Mantel in den Hohlraum des äusseren eingefügt werden kann. Sie ist eine Fläche vierter Ordnung und Classe (eine Kummer'sche Fläche, vergl. II. C.), besitzt 4 reelle konische Knotenpunkte und ebensoviele längs Kreisen berührende Doppel-tangentialebenen (die 12 andern sind imaginär.) Man erhält diese Fläche aus dem folgenden Ellipsoid dadurch, dass man auf den im Mittelpunkt errichteten Normalen zu Centralschnitten (Ebenen durch den Mittelpunkt) die 2 Haupt-axen dieser Schnittcurven (Ellipsen) nach beiden Seiten hin abträgt. Vergl. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Thl., 4. Cap. (12—8 cm.) *M.* 9. —.

161. (VI. 2.) Ellipsoid hierzu, aus dem die eben genannte Wellenfläche auf die angegebene Weise hervorgeht. (12—6 cm.) *M.* 4. —.

162. (VI. 4.) Wellenfläche für optisch zwei-axige Krystalle in einzelnen Octanten mit den sphärischen und ellipsoidischen Curven, die also beziehungsweise durch Kugeln und Ellipsoide ausgeschnitten werden. Auf jedem der beiden Mäntel ist das eine System sphärisch, das andere ellipsoidisch. Auf dem Modell sind ferner noch die Nabelpunkte angegeben. Die Oeffnungen markiren die Richtung des zugehörigen Strahls. Von Rector Dr. Böklen in Reutlingen, nebst einer Erläuterung. (24—12 cm.) *M.* 8. 50.

183—186. (XV., 1., 1—4.) Projektionsmodelle der vier ersten regelmässigen vier-dimensionalen Körper, in den drei-dimensionalen Raum projecirt, von Dr. V. Schlegel.

Vergl.: Schlegel »Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde«, Nova Acta d. Ksl. Leop. Carol. Akademie, Bd. 44, Nr. 4. Der Serie ist eine erläuternde Abhandlung von Schlegel beigegeben.

183. (XV. 1.) Fünfczelle, d. h. regelmässiges vier-dimensionales Gebilde, begrenzt von 5 regelmässigen congruenten Tetraedern. — Das Projektionsmodell besteht aus einem regelmässigen Tetraeder, welches symmetrisch in 4 Tetraeder zerlegt ist. — Alle Körper sind, wie auch in den übrigen Modellen, für welche alle folgenden Bemerkungen gelten, durch ihre Kanten dargestellt, und zwar theils in Draht, theils in Seide. Ein prinzipieller Unterschied zwischen den Draht- und den Seidenkanten besteht nicht; die abwechselnde Verwendung beider Stoffe ist in erster Linie durch technische Gründe bedingt. Jedoch dient dieselbe auch dazu, eine bessere

Uebersicht über die Schichtungsverhältnisse der Theilkörper zu geben. — Die an dem vier-dimensionalen Körper befindlichen Ecken, Kanten, Flächen und Körper kommen in den Projektionsmodellen genau in derselben Anzahl und Anordnung zur Anschauung, wie sie einer der unsrigen analogen Gesichtswahrnehmung im vier-dimensionalen Raume von einem bestimmten Augenpunkte aus erscheinen würden. — Die Modelle enthalten, abgesehen von ihrer Bedeutung für die Geometrie des vier-dimensionalen Raumes, auch die Lösung der rein stereometrischen Aufgabe: ein gegebenes homogenes Polyeder auf alle Arten homogen in gleichartige Polyeder zu zerlegen, und treten dadurch in Beziehung zur Theorie der räumlichen Configurationen. — (Kante des äusseren Tetraeders ca. 6 cm.) M. I. 20.

184. (XV. 2.) Achtzell, begrenzt von 8 congruenten Würfeln. Das Modell besteht aus einem in 7 Hexaeder zerlegten Würfel; 6 dieser Hexaeder bilden die äussere Schicht der Theilkörper und gruppieren sich symmetrisch um das siebente (einen Würfel), welches den Kern bildet, und demnach im vier-dimensionalen Raume dem

äusseren Würfel gegenüber liegen würde. — (Kante des äusseren Würfels 6 cm.) . M. 4. 50.

185. (XV. 3.) Sechzehnzell, begrenzt von 16 congruenten regelmässigen Tetraedern. — Ein regelmässiges Tetraeder ist in 15 Tetraeder zerlegt, von welchen 14 die äussere Schicht bilden und sich symmetrisch um ein inneres, den Kern bildendes regelmässiges Tetraeder gruppieren. — (Kante des äusseren Tetraeders ca. 8 cm.) M. 4. —.

186. (XV. 4.) Vierundzwanzigzell, begrenzt von 24 congruenten regelmässigen Oktaedern. — Ein regelmässiges Oktaeder ist in 23 Oktaeder zerlegt. Diese gruppieren sich symmetrisch in zwei Schichten, von denen die äussere 14, die innere 8 Oktaeder enthält, um einen Kern (regelmässiges Oktaeder). — (Kante des äusseren Oktaeders ca. 13 cm.) M. 18. —, zusammen M. 26. —.

Die Herausgabe der beiden noch fehlenden Projektionsmodelle (Sechshundertzell, begrenzt von 600 congruenten regelmässigen Tetraedern, und Hundertzwanzigzell, begrenzt von 120 congruenten regelmässigen Dodekaedern), die nebst den vorigen auch in der Abhandlung von Hess über perspektivische Dreiecke und Tetraeder (Math. Ann. 1886) behandelt worden sind, bleibt vorbehalten.

Zu dieser Gruppe sind auch die unter V. C., D. III. 197—199. aufgeführten Flächen zu rechnen.

Modell-Untersätze

aus Holz, schwarz gebeizt, ringförmig gestaltet, zur Herstellung eines besseren Auflagers bei den Modellen in Kugel- oder Ellipsoidform.

Preis per Stück je nach Grösse 80 Pf. bis 1 M.

Die Untersätze werden für folgende Modelle geliefert: I. Serie Nr. IV. u. V. — III. S. Nr. 1—4. — V. S. Nr. XIII a. u. b., XVI c. u. XVIII a. — VI. S. Nr. 1 a. u. b., 2 u. 3. — X. S. 1. Nachtr. Nr. 3 u. 7; 2. Nachtr. Nr. XXXII. a.—c.

